ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. Müller-Breslau-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

Band 1 **Ende April 1921** **Heft 2**

INHALT:



VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1 **Ende April 1921** **Heft 2**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die Berechnung dünner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit.

Von **H. HENCKY** in Dresden.

Herr Dr.-Ing. H. Marcus hat unlängst eine neue Methode zur Berechnung ebener Platten veröffentlicht [1]), die infolge ihrer Einfachheit und großen Anpassungsfähigkeit an die Bedürfnisse der Praxis die Theorie der ebenen Platten zu einem gewissen Abschluß zu bringen scheint.

Herr Marcus hat seine Methode, die im wesentlichen in der Zerlegung einer Differentialgleichung vierter Ordnung in zwei zweiter Ordnung und im Uebergang von der Differentialgleichung zu Differenzengleichungen besteht, auf die Berechnung von ebenen Platten angewendet, deren Mittelfläche bei beliebiger Belastung p bekanntlich der Differentialgleichung

$$\frac{m^2}{m^2-1} E J \left\{\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right\} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gehorcht. (E Elastizitätszahl, J Trägheitsmoment eines Querschnittstreifens von der Breite 1, z Ordinate der elastischen Fläche, p Belastung auf die Flächeneinheit.)

Es läßt sich nun zeigen, daß die Tragweite der Differenzen- und Summenrechnung eine viel größere ist. So kann man beispielsweise auch die Untersuchung der Knicksicherheit gedrückter ebener Platten bei ganz beliebigen Randbedingungen durchführen, indem man eine der Methode von Vianello für den gedrückten Stab analoge Methode auch für die Platte entwickelt. Ebenso lassen sich auch Platten berechnen, die verschiedenes elastisches Verhalten nach zwei Richtungen aufweisen.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Summen- und Differenzenrechnung bilden die Platten mit großer Ausbiegung, für die man bisher vergebens nach einer befriedigenden Lösung suchte. Freilich sind die zu diesem Zwecke anzustellenden Zahlenrechnungen sehr verwickelt und umständlich, wenn sie auch die relativ einfachste Lösung des Problems darstellen. In der vorliegenden Abhandlung beschränken wir uns auf die Darstellung des Spannungszustandes von quadratischen Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit. Die Erweiterung auf die rechteckige Platte sowie auf Platten mit nicht zu vernachlässigender Biegungssteifigkeit ist ohne weiteres möglich, erfordert aber bei gleichem Grade der Annäherung eine wesentlich größere Rechenarbeit.

[1]) Armierter Beton, 1919, S. 107 u. f.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1 **Ende April 1921** **Heft 2**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die Berechnung dünner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegungsteifigkeit.

Von **H. HENCKY** in Dresden.

Herr Dr.-Ing. H. Marcus hat unlängst eine neue Methode zur Berechnung ebener Platten veröffentlicht[1]), die infolge ihrer Einfachheit und großen Anpassungsfähigkeit an die Bedürfnisse der Praxis die Theorie der ebenen Platten zu einem gewissen Abschluß zu bringen scheint.

Herr Marcus hat seine Methode, die im wesentlichen in der Zerlegung einer Differentialgleichung vierter Ordnung in zwei zweiter Ordnung und im Uebergang von der Differentialgleichung zu Differenzengleichungen besteht, auf die Berechnung von ebenen Platten angewendet, deren Mittelfläche bei beliebiger Belastung p bekanntlich der Differentialgleichung

$$\frac{m^2}{m^2-1} E J \left\{\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right\} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gehorcht. (E Elastizitätszahl, J Trägheitsmoment eines Querschnittstreifens von der Breite 1, z Ordinate der elastischen Fläche, p Belastung auf die Flächeneinheit.)

Es läßt sich nun zeigen, daß die Tragweite der Differenzen- und Summenrechnung eine viel größere ist. So kann man beispielsweise auch die Untersuchung der Knicksicherheit gedrückter ebener Platten bei ganz beliebigen Randbedingungen durchführen, indem man eine der Methode von Vianello für den gedrückten Stab analoge Methode auch für die Platte entwickelt. Ebenso lassen sich auch Platten berechnen, die verschiedenes elastisches Verhalten nach zwei Richtungen aufweisen.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Summen- und Differenzenrechnung bilden die Platten mit großer Ausbiegung, für die man bisher vergebens nach einer befriedigenden Lösung suchte. Freilich sind die zu diesem Zwecke anzustellenden Zahlenrechnungen sehr verwickelt und umständlich, wenn sie auch die relativ einfachste Lösung des Problems darstellen. In der vorliegenden Abhandlung beschränken wir uns auf die Darstellung des Spannungszustandes von quadratischen Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit. Die Erweiterung auf die rechteckige Platte sowie auf Platten mit nicht zu vernachlässigender Biegungssteifigkeit ist ohne weiteres möglich, erfordert aber bei gleichem Grade der Annäherung eine wesentlich größere Rechenarbeit.

[1]) Armierter Beton, 1919, S. 107 u. f.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

Bd. 1 **Ende April 1921** **Heft 2**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Die Berechnung dünner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit.

Von **H. HENCKY** in Dresden.

Herr Dr.-Ing. H. Marcus hat unlängst eine neue Methode zur Berechnung ebener Platten veröffentlicht[1]), die infolge ihrer Einfachheit und großen Anpassungsfähigkeit an die Bedürfnisse der Praxis die Theorie der ebenen Platten zu einem gewissen Abschluß zu bringen scheint.

Herr Marcus hat seine Methode, die im wesentlichen in der Zerlegung einer Differentialgleichung vierter Ordnung in zwei zweiter Ordnung und im Uebergang von der Differentialgleichung zu Differenzengleichungen besteht, auf die Berechnung von ebenen Platten angewendet, deren Mittelfläche bei beliebiger Belastung p bekanntlich der Differentialgleichung

$$\frac{m^2}{m^2-1} E J \left\{ \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \right\} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gehorcht. (E Elastizitätszahl, J Trägheitsmoment eines Querschnittstreifens von der Breite 1, z Ordinate der elastischen Fläche, p Belastung auf die Flächeneinheit.)

Es läßt sich nun zeigen, daß die Tragweite der Differenzen- und Summenrechnung eine viel größere ist. So kann man beispielsweise auch die Untersuchung der Knicksicherheit gedrückter ebener Platten bei ganz beliebigen Randbedingungen durchführen, indem man eine der Methode von Vianello für den gedrückten Stab analoge Methode auch für die Platte entwickelt. Ebenso lassen sich auch Platten berechnen, die verschiedenes elastisches Verhalten nach zwei Richtungen aufweisen.

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Summen- und Differenzenrechnung bilden die Platten mit großer Ausbiegung, für die man bisher vergebens nach einer befriedigenden Lösung suchte. Freilich sind die zu diesem Zwecke anzustellenden Zahlenrechnungen sehr verwickelt und umständlich, wenn sie auch die relativ einfachste Lösung des Problems darstellen. In der vorliegenden Abhandlung beschränken wir uns auf die Darstellung des Spannungszustandes von quadratischen Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit. Die Erweiterung auf die rechteckige Platte sowie auf Platten mit nicht zu vernachlässigender Biegungssteifigkeit ist ohne weiteres möglich, erfordert aber bei gleichem Grade der Annäherung eine wesentlich größere Rechenarbeit.

[1]) Armierter Beton, 1919, S. 107 u. f.

1. Die Differentialgleichungen des Problems. Da die Differentialgleichungen der gebogenen Platte mit großer Ausbiegung in den verbreitetsten Lehrbüchern der Festigkeitslehre ausführlich entwickelt [1]) sind, so darf von einer Ableitung an dieser Stelle abgesehen werden.

Sind T_x, T_y, T_{xy} die auf die Einheit der Randlinie eines Plattenelementes bezogenen Zug- und Schubspannungsresultanten, so kann man setzen:

$$T_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\,; \quad T_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,; \quad T_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2).$$

Zwischen der Funktion U und den Ordinaten z der gebogenen Mittelfläche der Platte besteht dann die Beziehung:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + Eh\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right\} = 0 \quad . \ . \ . \ . \quad (3).^{2)}$$

Diese Beziehung drückt den Zusammenhang aus, welcher zwischen den Krümmungen der elastischen Fläche und der Verzerrung der Mittelfläche in ihrer Ebene besteht. Sie ist unabhängig von der Belastung der Platte und unabhängig von den absoluten Werten der Durchbiegungen. Setzt man für ein Plattenelement, welches aus dem Zusammenhang herausgeschnitten wird, die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in Richtung der Auflast p an, so erhält man eine zweite Differentialgleichung:

$$\frac{m^2 E J}{m^2-1}\left\{\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right\} - \left\{T_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\,T_{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\} = p \quad . \quad (4).$$

Zu diesen Gleichungen treten dann noch die in jedem einzelnen Fall maßgebenden Randbedingungen.

2. Die Platte mit verschwindender Biegungssteifigkeit. Wir nehmen nun an, die Biegungssteifigkeit der Platte sei verschwindend klein, dann wird $J = 0$ und es verschwindet der erste Ausdruck in Gl. (4). Wir erhalten ferner, wenn wir eine neue Größe $T = T_x + T_y$, die Summe der Spannungsresultanten, einführen, aus den Gl. (2)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = T \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5\,\mathrm{a}).$$

Substituieren wir diesen Ausdruck in Gl. (3), so haben wir

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Eh\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2\right\} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5\,\mathrm{b})$$

und mit Gl. (4)

$$T_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\,T_{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5\,\mathrm{c}).$$

Wir setzen nun die Lösung in folgender Form an:

$$U = a^2 \sqrt[3]{p^2 a^2 Eh}\,\omega \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6\,\mathrm{a})$$

$$z = a\sqrt{\frac{pa}{Eh}}\,\zeta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6\,\mathrm{b}),$$

wobei ω und ζ Funktionen des Ortes, aber ohne jede Dimension, also bloße Zahlen darstellen. Gehen wir ferner von Differentialen dx und dy zu Differenzen $\Delta x = \Delta y = \frac{a}{n}$ über ($2a$ Seitenlänge der Platte), so muß der mechanischen Aehnlichkeit entsprechend

$$T = \sqrt[3]{p^2 a^2 Eh}\, n^2 \tau \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6\,\mathrm{c})$$

gesetzt werden, wobei τ ebenfalls wieder eine Funktion ohne Dimension ist. Setzen wir diese so definierten Größen in die in Differenzengleichungen verwandelten Differentialgleichungen (5a), (5b), (5c) ein, so erhalten wir das simultane System

---

[1]) Vergl. A. Föppl, Techn. Mechanik, Bd. V, Leipzig 1907, S. 132 u. f., oder A. und L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. I, München 1920, S. 216 u. f., ferner v. Karman, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. IV, Art. 27, S. 349 und 350.

[2]) Der Ausdruck $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in Gl. (3) ist mit großer Annäherung gleich dem Gaußschen Krümmungsmaß der Mittelfläche der Platte. Die Werte U können also als Ordinaten einer Platte gedeutet werden, welche mit einer dem jeweiligen Krümmungsmaß der untersuchten Platte proportionalen Auflast versehen ist und der Gl. (1) gehorcht.

$$\Delta_x^2 \tau + \Delta_y^2 \tau = -\{\Delta_x^2 \zeta \, \Delta_y^2 \zeta - (\Delta_{xy}^2 \zeta)^2\} = -\varkappa \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7\,a)$$

$$\Delta_x^2 \omega + \Delta_y^2 \omega = \tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7\,b)$$

$$1 = n^4 \{2 \, \Delta_{xy}^2 \omega \, \Delta_{xy} \zeta - \Delta_x^2 \omega \, \Delta_y \zeta - \Delta_x^2 \zeta \, \Delta_y^2 \omega\} \quad . \; . \; . \; . \quad (7\,c),$$

Dabei definieren wir im Einklang mit den Regeln der Differenzen- und Summenrechnung, wenn z. B. ζ_{ik} die Größe ζ im Netzpunkt ik darstellt, als zweite Differenz nach einer bestimmten Richtung:

$$\left.\begin{aligned}
(\Delta_i^2 \zeta)_{ik} &= (\zeta_{i+1,k} - \zeta_{ik}) - (\zeta_{ik} - \zeta_{i-1,k}) = \zeta_{i-1,k} - 2\,\zeta_{ik} + \zeta_{i+1,k} \\
(\Delta_k^2 \zeta)_{ik} &= (\zeta_{i,k+1} - \zeta_{ik}) - (\zeta_{ik} - \zeta_{i,k-1}) = \zeta_{i,k-1} - 2\,\zeta_{ik} + \zeta_{i,k+1} \\
(\Delta_{ik}^2 \zeta)_{ik} &= {}^1/_2 \left\{\frac{\zeta_{i+1,k+1} - \zeta_{i-1,k+1}}{2} - \frac{\zeta_{i+1,k-1} - \zeta_{i-1,k-1}}{2}\right\} \\
&= {}^1/_4 \{\zeta_{i+1,k+1} + \zeta_{i-1,k-1} - \zeta_{i+1,k-1} - \zeta_{i-1,k+1}\}
\end{aligned}\right\} . \quad (8)$$

entsprechend den drei Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y}$ nach Uebergang zu unendlich kleinem Abstand der Netzpunkte.

(Vgl. Abb. 1 auf S. 84)

Nun haben wir nur noch die Randbedingungen einzuführen. Wir nehmen an, daß die Ränder der Platte unverschieblich festgehalten seien. Zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten hängt dann die Platte durch, so daß die Summe der Verlängerungen der einzelnen Plattenelemente gleich dem Ueberschuß der Bogenlänge über die zugehörige Sehne ist. Es wird beispielsweise für die Linien, welche sich im Netzpunkt $u\,v$ kreuzen,

$$(\varepsilon_x)_{0,v} \frac{\lambda}{2} + (\varepsilon_x)_{1,v} \lambda + \ldots (\varepsilon_x)_{u-1,v} \lambda + (\varepsilon_x)_{u,v} \lambda + \ldots (\varepsilon_x)_{u,v} \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=0}^{i=n} (z_{iv} - z_{i+1,v})^2$$

$$(\varepsilon_y)_{u,0} \frac{\lambda}{2} + (\varepsilon_y)_{u,1} \lambda + \ldots (\varepsilon_y)_{u,v-1} \lambda + (\varepsilon_y)_{u,v} \lambda + \ldots (\varepsilon_y)_{u,n} \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=0}^{i=n} (z_{ui} - z_{u,i+1})^2 .$$

Nun ist bei der quadratischen Platte wegen der Symmetrie zur Halbierungslinie des Winkels zwischen den Koordinatenachsen $z_{uv} = z_{vu}$; wählen wir daher die Punkte $u = v$, so werden die rechten Seiten der beiden angeschriebenen Gleichungen identisch, links kann man setzen $(\varepsilon_y)_{uv} = (\varepsilon_y)_{vu}$, so daß die beiden Gleichungen sich durch Addition in eine einzige zusammenziehen lassen:

$$(\varepsilon_x + \varepsilon_y)_{0,v} \frac{\lambda}{2} + \ldots (\varepsilon_x + \varepsilon_y)_{v,v} \lambda + \ldots (\varepsilon_x + \varepsilon_y)_{u,v} \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{i=0} z_{i,v} - z_{i+1,v})^2 .$$

Drückt man die Dehnungen durch die Spannungen aus:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh}\left(T_x - \frac{1}{m} T_y\right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{Eh}\left(T_y - \frac{1}{m} T_x\right), \quad \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{T}{Eh}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

und setzt an Stelle der Dehnungssummen die Summe der Spannungsresultanten in die Gleichung, sowie für z und T die in den Gleichungen 6 b und 6 c definierten Werte, so gewinnt man schließlich als Randbedingung die Gleichungen:

$$\tau_{uv} + \ldots 2\,\tau_{u-1,v} + 2\,\tau_{uv} + 2\tau_{u+1,v} + \ldots \tau_{nv} = \frac{2\,m}{m-1} \sum_{i=0}^{i=n} (\zeta_{iv} - \zeta_{i+1,v})^2 . \quad (9a).$$

Wir erhalten n derartige Gleichungen. Bei der rechteckigen Platte ist die Elimination der Größen ε_x und ε_y umständlicher, wir würden hier $2\,n$ Gleichungen erhalten.

Durch die Gleichungen (9 a) und (7 a) sind bei bekannten Ordinaten ζ die Werte τ für alle Punkte der Platte eindeutig bestimmt. Am Rande $u = n$ nimmt die Bedingung (9a) die spezielle Form $\varepsilon_y = 0$ an, d. h. $T_x = \frac{m}{m+1} T$ oder mit Gl. (6 a) und (6 c) sowie Gl. (2):

$$(\Delta_y^2 \omega)_{nv} = \frac{m}{m+1} \tau_{nv} = \omega_{n,v-1} - 2\,\omega_{nv} + \omega_{n,v+1} .$$

Setzen wir $\omega_{n,0} = 0$, was wir mit Rücksicht darauf tun dürfen, daß eine Vermehrung der Spannungsfunktion um eine konstante Größe keinen Einfluß auf die Spannungen hat, so erhalten wir das System:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{n1} &= \frac{m}{m+1}\, {}^1/_2\, \tau_{n0} \\
\omega_{n2} &= \frac{m}{m+1} (\tau_{n0} + \tau_{n1}) \\
\omega_{n3} &= \frac{m}{m+1} ({}^3/_2\, \tau_{n0} + 2\,\tau_{n1} + \tau_{n2})
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9\,b).$$

Durch (7b) und (9b) sind wieder unter Annahme bekannter ζ die Größen ω für alle Netzpunkte eindeutig bestimmt.

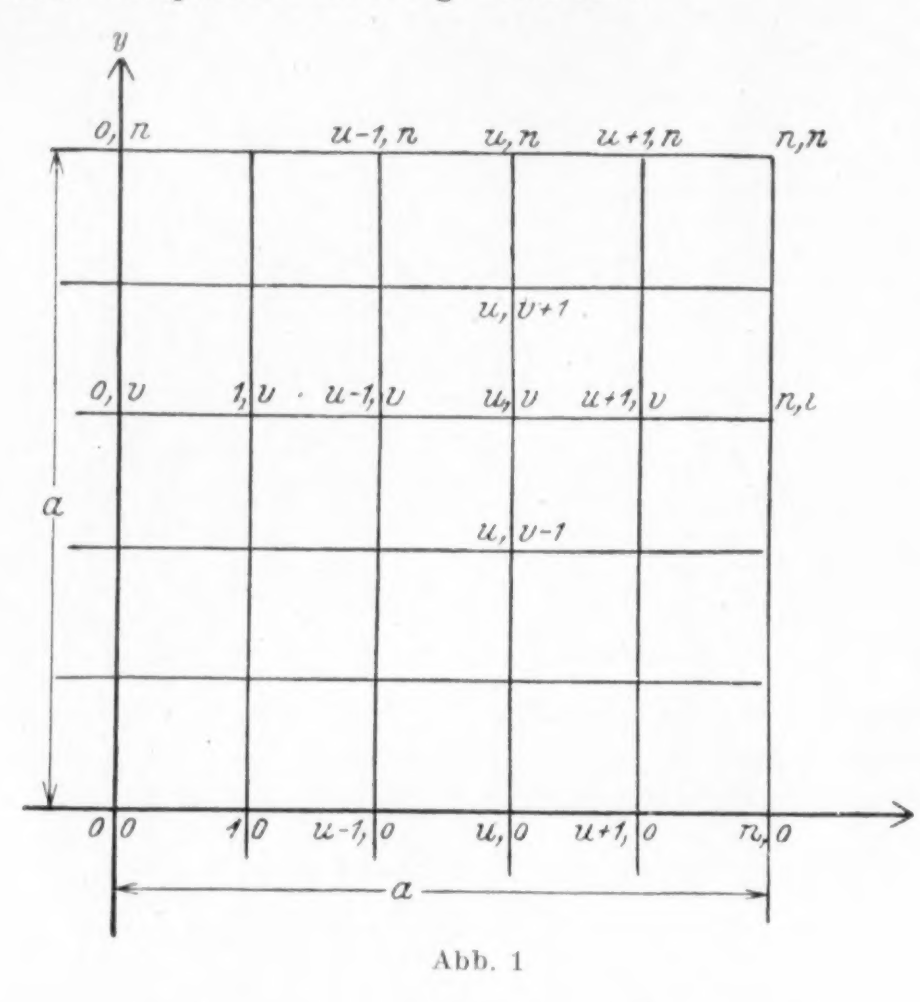


Abb. 1

Sind nun die angenommenen ζ die richtigen, so muß Gl. (7c) identisch befriedigt werden. Betrachten wir diese Gleichung (7c) näher, so bemerken wir, daß die Größen ω durch einen umständlichen Rechnungsprozeß aus den angenommenen Größen ζ berechnet werden. Die Funktion ω ist daher gegen kleine Aenderungen von ζ wenig empfindlich. Ersetzen wir jetzt in Gl. (7c) die zweiten Differenzen nach ω durch die aus den angenommenen Größen ζ folgenden Werte und die zweiten Differenzen nach ζ durch die allgemeinen Werte nach Gl. (8), so erhalten wir für die Ordinaten ζ ein lineares Gleichungssystem, aus welchem sich verbesserte Werte der unbekannten Ordinaten ζ errechnen lassen.

Die Betrachtung des Gleichungssystems (7) lehrt uns, daß unsere Aufgabe auf die wiederholte Lösung der Differenzengleichung:

$$\Delta_x^2 w + \Delta_y^2 w = -q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

sich zurückführen läßt.

3. Die quadratische Platte mit $n = 2$. Für $n = 2$ lautet das System der Gleichungen (10) ausführlich angeschrieben:

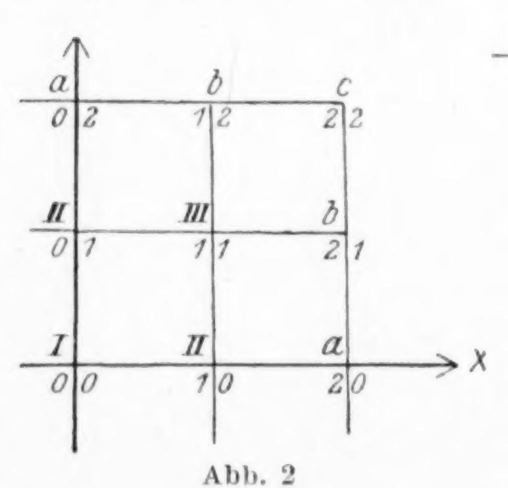


Abb. 2

$$\begin{aligned} 4\,w_1 - 4\,w_2 \qquad\quad &= q_1 \\ -w_1 + 4\,w_2 - 2\,w_3 &= q_2 + w_a \\ -2\,w_2 + 4\,w_3 &= q_3 + 2\,w_b \end{aligned}$$

und die Lösung lautet in Tabellenform:

	q_1	q_2	q_3	w_a	w_b
$w_1 = \Sigma$	0,375	0,500	0,250	0,500	0,500
$w_2 = \Sigma$	0,125	0,500	0,250	0 500	0,500
$w_3 = \Sigma$	0,0625	0,250	0,375	0,250	0,750

(11).

		ζ	$\Delta_x^2\zeta$	$\Delta_y^2\zeta$	$\Delta_{xy}^2\zeta$	$\varkappa$
1	00	0,665	$2(\zeta_2 - \zeta_1)$ $-0,278$	$-0,272$	0	$0,278^2$ $= 0,0774$
2	01	0,526	$2(\zeta_3 - \zeta_2)$ $-0,156$	$-0,387$	0	$0,156 \cdot 0,387$ $= 0,0604$
	10	0,526	$\zeta_1 - 2\,\zeta_2$ $-0,387$	$-0,156$	0	$0,387 \cdot 0,156$ $= 0,0604$
3	11	0,443	$\zeta_2 - 2\,\zeta_3$ $-0,370$	$-0,370$	$^1/_4\,\zeta_1$ $+0,166$	$0,37^2 - 0,166^2$ $= 0,1091$

Unter Anwendung von Gl. (11) erhält man aus Gl. (7a)

$$\tau_1 = 0{,}0865 + 0{,}5\ \tau_a + 0{,}5\ \tau_b$$
$$\tau_2 = 0{,}0672 + 0{,}5\ \tau_a + 0{,}5\ \tau_b$$
$$\tau_3 = 0{,}0595 + 0{,}25\ \tau_a + 0{,}75\ \tau_b.$$

Die Randbedingung (9a) wird für $m = \frac{10}{3}$

$$\tau_a + 2\,\tau_2 + \tau_1 = \frac{20}{7}\,\{0{,}526^2 + 0{,}139^2\} = 0{,}845$$

$$\tau_b + 2\,\tau_3 + \tau_2 = \frac{20}{7}\,\{0{,}448^2 + 0{,}078^2\} = 0{,}593$$

hiermit

$$2{,}5\,\tau_a + 1{,}5\,\tau_b = 0{,}624 \quad \Big|\quad \tau_a = 0{,}2103$$
$$\tau_a + 3{,}0\,\tau_b = 0{,}407 \quad \Big|\quad \tau_b = 0{,}0656$$
$$\tau_1 = 0{,}2244,\quad \tau_2 = 0{,}2051,\quad \tau_3 = 0{,}1613.$$

Die Gl. (9b) geben

$$\omega_b = \frac{1}{2{,}6}\cdot 0{,}2103 = 0{,}081$$

$$\omega_c = \frac{1}{1{,}3}\,(0{,}2103 + 0{,}0656) = 0{,}212.$$

Durch abermalige Anwendung der Tabelle (11) erhalten wir jetzt mit $q = -\tau$ und $w = \omega$ die Werte von ω. Es ist jedoch zweckmäßig, direkt die Größen $\Delta_x{}^2\omega$ und $\Delta_y{}^2\omega$ zu rechnen und nicht die Größe ω selbst, da sich die Rechnung dann mit dem Rechenschieber durchführen läßt.

	$\tau_y = \Delta_x{}^2\omega$	$\tau_x = \Delta_y{}^2\omega$	$-\tau_{xy} = +\Delta_{xy}{}^2\omega$	$a = n^4\tau_y$	$b = n^4\tau_x$	$c = -n^4\tau_{xy}$
00	$(2\,\omega_2 - \omega_1)$ → $+ 0{,}1122$	→ $+ 0{,}1122$	0	1,798	1,798	0
01	$2\,(\omega_3 - \omega_2)$ $+ 0{,}1304$ ↘	↗ $+ 0{,}0743$	0	2,09	1,19	0
10	$\omega_1 - 2\,\omega_2$ ↗ $+ 0{,}0743$	↘ $+ 0{,}1307$	0	1,19	2,09	0
11	$\omega_2 + \omega_b - 2\,\omega_3$ → $+ 0{,}08065$	→ $+ 0{,}08065$	$\frac{1}{4}(\omega_1 + \omega_c)$ $+ 0{,}0064$	1,29	1,29	0,102

Aus Gl. (7c) erhalten wir das lineare System

$$+ 7{,}2\ \zeta_1 - 7{,}2\ \zeta_2 \qquad = 1$$
$$- 2{,}09\ \zeta_1 + 6{,}56\ \zeta_2 - 2{,}38\ \zeta_3 = 1$$
$$+ 0{,}051\ \zeta_1 - 2{,}58\ \zeta_2 + 5{,}16\ \zeta_3 = 1.$$

Hieraus ergeben sich die Werte

$$\zeta_1 = 0{,}666,\quad \zeta_2 = 0{,}527,\quad \zeta_3 = 0{,}450.$$

Der Vergleich mit den angenommenen Werten zeigt, daß die Rechnung beendigt ist, da der Unterschied nur 1 bis 2 Einheiten der 3. Dezimale beträgt.

4. Die quadratische Platte mit $n = 3$.

Nachdem wir die Ordinaten der elastischen Fläche für $n = 2$ gefunden haben, ist es ein Leichtes, unter Zuhilfenahme der graphischen Darstellung und unter Berücksichtigung der Stetigkeitseigenschaften der elastischen Fläche auch die Ordinaten für $n = 3$ anzugeben.

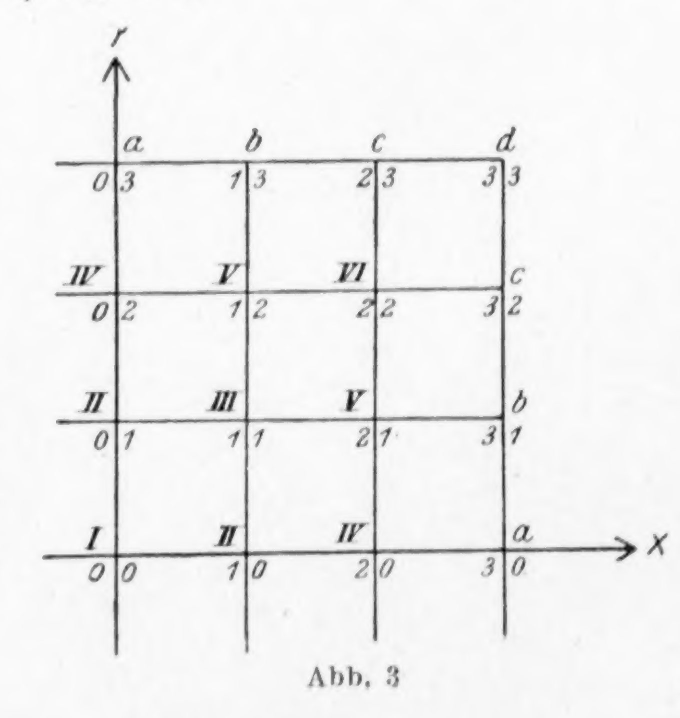


Abb. 3

Die Differenzengleichungen (10) lauten hier

$$
\begin{aligned}
4\,w_1 - 4\,w_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= q_1 \\
- w_1 + 4\,w_2 - 2\,w_3 - w_4 \qquad\qquad\qquad &= q_2 \\
- 2\,w_2 + 4\,w_3 \qquad - 2\,w_5 \qquad &= q_3 \\
- w_2 \qquad + 4\,w_4 - 2\,w_5 \qquad &= q_4 + w_a \\
- w_3 - w_4 + 4\,w_5 - w_6 &= q_5 + w_b \\
- 2\,w_5 + 4\,w_6 &= q_6 + 2\,w_c .
\end{aligned}
$$

Die Lösung lautet in Tabellenform

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	w_a	w_b	w_c
$w_1 = \Sigma$	0,4423	0,7692	0,5000	0,3077	0,4615	0,1154	0,3077	0,4615	0,2308
$w_2 = \Sigma$	0,1923	0,7692	0,5000	0,3077	0,4615	0,1154	0,3077	0,4615	0,2308
$w_3 = \Sigma$	0,1250	0,5000	0,6250	0,2500	0,5000	0,1250	0,2500	0,5000	0,2500
$w_4 = \Sigma$	0,0769	0,3077	0,2500	0,4231	0,3846	0,0961	0,4231	0,3846	0,1923
$w_5 = \Sigma$	0,0577	0,2308	0,2500	0,1923	0,5384	0,1346	0,1923	0,5384	0,2692
$w_6 = \Sigma$	0,0288	0,1154	0,1250	0,0961	0,2692	0,3173	0,0961	0,2692	0,6346

		ζ	$\Delta_x^2\,\zeta$	$\Delta_y^2\,\zeta$	$\Delta_{xy}^2\,\zeta$	$\varkappa$
1	00	0,665	$2(\zeta_2 - \zeta_1)$ — → $-0{,}124$	$-0{,}124$	0	$0{,}124^2 = 0{,}0154$
2	01	0,603	$2(\zeta_3 - \zeta_2)$ $-0{,}096$	$-0{,}153$	0	$0{,}096 \cdot 0{,}153$ $= 0{,}0147$
	10	0,603	$\zeta_1 + \zeta_4 - \zeta_2$ $-0{,}153$	$-0{,}096$	0	0,0147
3	11	0,555	$\zeta_2 + \zeta_5 - 2\,\zeta_3$ — → $-0{,}134$	$-0{,}134$	$^1/_4\,(\zeta_1 + \zeta_6 - 2\,\zeta_4)$ $+0{,}05225$	$0{,}134^2 - 0{,}052^2$ $= 0{,}0152$
4	02	0,388	$2(\zeta_5 - \zeta_4)$ $-0{,}030$	$-0{,}173$	0	$0{,}030 \cdot 0{,}173$ $= 0{,}0052$
	20	0,388	$\zeta_2 - 2\,\zeta_4$ $-0{,}173$	$-0{,}030$	0	$= 0{,}0052$
5	12	0,373	$\zeta_4 + \zeta_6 - 2\,\zeta_5$ $-0{,}038$	$-0{,}191$	$^1/_4\,(\zeta_2 - \zeta_5)$ $+0{,}0575$	$0{,}038 \cdot 0{,}191$ $-0{,}0575^2$ $= 0{,}0040$
	21	0,373	$\zeta_3 - 2\,\zeta_5$ $-0{,}191$	$-0{,}038$	$^1/_4\,(\zeta_2 - \zeta_5)$ $+0{,}0575$	$= 0{,}0040$
6	22	0,320	$\zeta_5 - 2\,\zeta_6$ — → $-0{,}267$	$-0{,}267$	$^1/_4\,\zeta_3$ $+0{,}1387$	$0{,}267^2 - 0{,}139^2$ $= 0{,}052$

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= 0{,}03516 + 0{,}3077\,\tau_a + 0{,}4615\,\tau_b + 0{,}2308\,\tau_c \\
\tau_2 &= 0{,}03134 + 0{,}3077\,\tau_a + 0{,}4615\,\tau_b + 0{,}2308\,\tau_c \\
\tau_3 &= 0{,}02857 + 0{,}2500\,\tau_a + 0{,}5000\,\tau_b + 0{,}2500\,\tau_c \\
\tau_4 &= 0{,}01824 + 0{,}4231\,\tau_a + 0{,}3846\,\tau_b + 0{,}1923\,\tau_c \\
\tau_5 &= 0{,}01824 + 0{,}1923\,\tau_a + 0{,}5384\,\tau_b + 0{,}2692\,\tau_c \\
\tau_6 &= 0{,}02212 + 0{,}0961\,\tau_a + 0{,}2692\,\tau_b + 0{,}6346\,\tau_c
\end{aligned}
$$

Die Randbedingung (9a) ergibt das System $\left(\text{mit } m = \frac{10}{3}\right)$

$$\tau_a + 2\,\tau_4 + 2\,\tau_2 + \tau_1 = \frac{20}{7}\,\{0{,}388^2 + 0{,}215^2 + 0{,}062^2\} = 0{,}573$$

$$\tau_b + 2\,\tau_5 + 2\,\tau_3 + \tau_2 = \frac{20}{7}\,\{0{,}373^2 + 0{,}182^2 + 0{,}048^2\} = 0{,}499$$

$$\tau_c + 2\,\tau_6 + 2\,\tau_5 + \tau_4 = \frac{20}{7}\,\{0{,}320^2 + 0{,}053^2 + 0{,}015^2\} = 0{,}301$$

und nach Einsetzen der Werte von $\tau_1 \ldots . \tau_6$

$$\tau_a\,2{,}769 + \tau_b\,2{,}154 + \tau_c\,1{,}077 = 0{,}439$$
$$\tau_a\,1{,}192 + \tau_b\,3{,}538 + \tau_c\,1{,}269 = 0{,}374$$
$$\tau_a\,1{,}000 + \tau_b\,2{,}000 + \tau_c\,3{,}000 = 0{,}202$$

$$\tau_a = +\,0{,}1063, \quad \tau_b = +\,0{,}0768, \quad \tau_c = -\,0{,}0193$$

$$\tau_1 = 0{,}09884 \quad \tau_4 = 0{,}08904 \quad | \quad \omega_b = +\,0{,}0409$$
$$\tau_2 = 0{,}09500 \quad \tau_5 = 0{,}07482 \quad | \quad \omega_c = +\,0{,}1410$$
$$\tau_3 = 0{,}08874 \quad \tau_6 = 0{,}04079 \quad | \quad \omega_d = +\,0{,}2260.$$

		$\tau_y = \Delta_x^2\,\omega$	$\tau_x = \Delta_y^2\,\omega$	$-\tau_{xy} = \Delta_{xy}^2\,\omega$	$a = n^4\,\tau_y$	$b = n^4\,\tau_x$	$c = -n^4\,\tau_{xy}$
1	00	$2\,(\omega_2 - \omega_1)$ $+\,0{,}04942$	$+\,0{,}04942$	0	4,0	4,0	0
2	01	$2\,(\omega_3 - \omega_2)$ $+\,0{,}0545$	$+\,0{,}0405$	0	4,41	3,28	0
	10	$\omega_1 + \omega_4 - 2\,\omega_2$ $+\,0{,}0405$	$+\,0{,}0545$	0	3 28	4,41	0
3	11	$\omega_2 + \omega_5 - 2\,\omega_3$ $+\,0{,}04437$	$+\,0{,}04437$	$\frac{1}{4}(\omega_1 + \omega_6 - 2\,\omega_4)$ $+\,0{,}00768$	3,59	3,59	0,62
4	02	$2\,(\omega_5 - \omega_4)$ $+\,0\;0676$	$+\,0{,}0214$	0	5,48	1,73	0
	20	$\omega_2 - 2\,\omega_4$ $+\,0{,}0214$	$+\,0{,}0676$	0	1,73	5,48	0
5	12	$\omega_4 + \omega_6 - 2\,\omega_5$ $+\,0{,}0529$	$+\,0{,}0219$	$\frac{1}{4}(\omega_2 + \omega_c - \omega_5)$ $+\,0{,}0105$	4,29	1,78	0,85
	21	$\omega_3 + \omega_b - 2\,\omega_5$ $+\,0{,}0219$	$+\,0{,}0529$	$\frac{1}{4}(\omega_2 + \omega_c - \omega_5)$ $+\,0{,}0105$	1,78	4 29	0,85
6	22	$\omega_5 + \omega_c - 2\,\omega_6$ $+\,0{,}0204$	$+\,0{,}0204$	$\frac{1}{4}(\omega_3 + \omega_d - 2\,\omega_c)$ $+\,0{,}00495$	1,65	1,65	0,40

Zur Bestimmung der ζ erhalten wir das folgende System, das durch seinen Bau auf Auflösung durch Iteration hinweist.

$$\begin{aligned}
&+16\,\zeta_1 - 16\,\zeta_2 &&= 1\\
&-4{,}41\,\zeta_1 + 15{,}38\,\zeta_2 - 6{,}56\,\zeta_3 - 4{,}41\,\zeta_4 &&= 1\\
&+0{,}31\,\zeta_1 - 7{,}18\,\zeta_2 + 14{,}36\,\zeta_3 - 0{,}62\,\zeta_4 - 7{,}18\,\zeta_5 + 0{,}31\,\zeta_6 &&= 1\\
&-5{,}48\,\zeta_2 + 14{,}42\,\zeta_4 - 3{,}46\,\zeta_6 &&= 1\\
&+0{,}425\,\zeta_2 - 4{,}29\,\zeta_3 - 1{,}78\,\zeta_4 + 11{,}715\,\zeta_5 - 1{,}78\,\zeta_6 &&= 1\\
&+0{,}20\,\zeta_3 - 3{,}30\,\zeta_5 + 6{,}6\,\zeta_6 &&= 1,
\end{aligned}$$

woraus

$$\zeta_1 = 0{,}665 \quad \zeta_4 = 0{,}388$$
$$\zeta_2 = 0{,}603 \quad \zeta_5 = 0{,}370$$
$$\zeta_3 = 0{,}553 \quad \zeta_6 = 0{,}320.$$

Wir sind jetzt in der Lage, den Formänderungs- und Spannungszustand der quadratischen Platte zu beschreiben.

Werte der Spannungen:

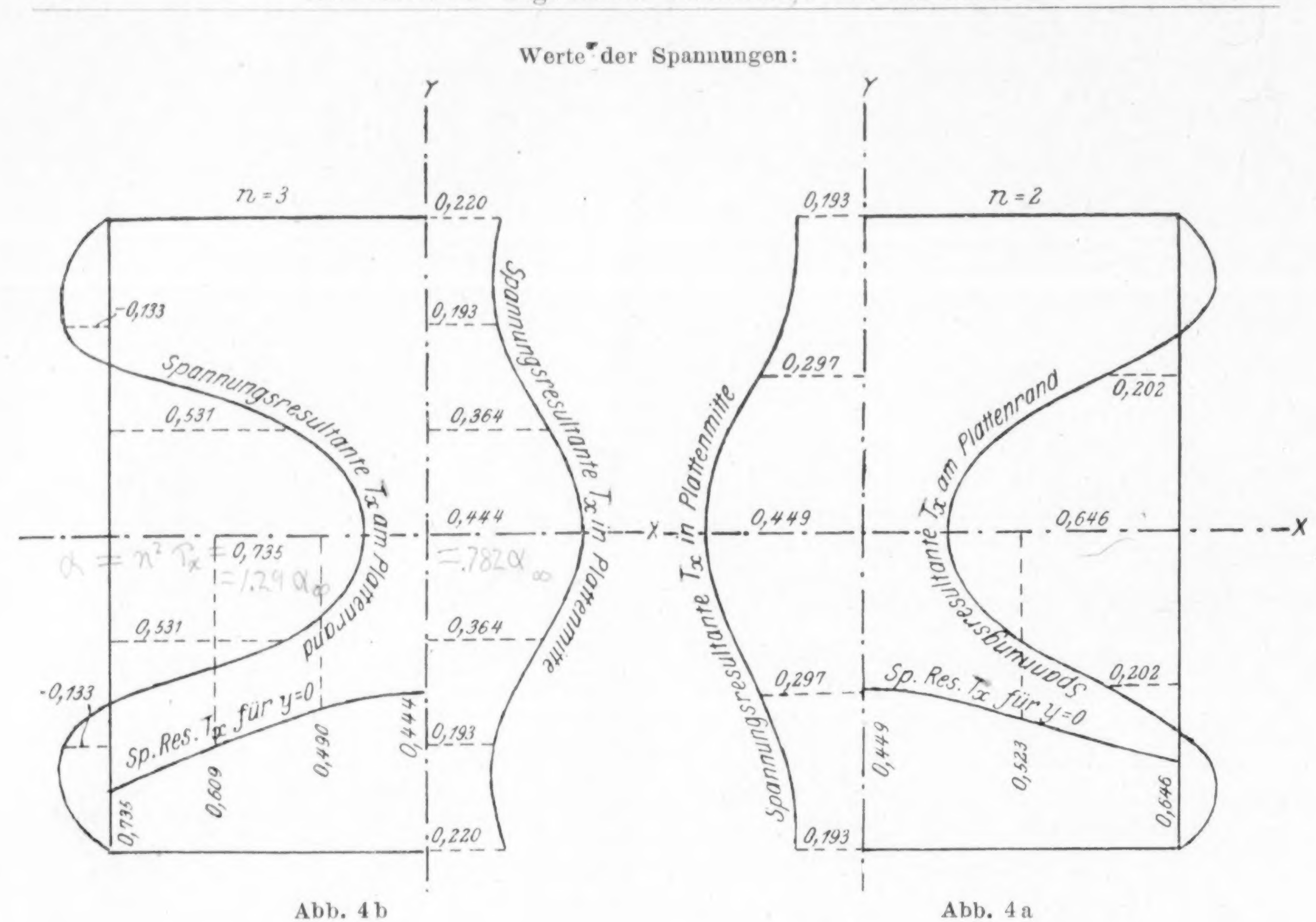


Abb. 4 b Abb. 4 a

Zu den Zahlen für die Spannungen ist der Faktor $\sqrt[3]{E h p^2 a^2}$ zu ergänzen.

In dem schon zitierten V. Bande seiner Vorlesungen gibt *Föppl* die Formeln für die an 2 Rändern festgehaltene rechteckige Platte. Setzen wir dort $m = \frac{10}{3}$, so wird mit unserer Schreibweise

$$z_{\text{Mitte}} = 0{,}88\, a \sqrt[3]{\frac{a p}{h z}}$$

$$T_x = 0{,}568 \sqrt[3]{h E p^2 a^2}\,.$$

Ein Blick auf die Spannungsverteilung in der 4 seitig festgehaltenen Platte zeigt uns, daß hier die größte Randspannung größer ausfällt, als wenn die Platte nur an 2 Rändern festgehalten würde. Ein Vergleich der quadratischen Platte mit der Kreisplatte zeigt, daß die Durchbiegung bei beiden die gleiche ist, wenn die Seitenlänge der Platte dem Durchmesser gleich ist. Dafür ist die Beanspruchung der quadratischen Platte höher.

Höhenschichtenkarte der verzerrten Mittelfläche der Platte
a) nach Gl. 5 a) b) c)

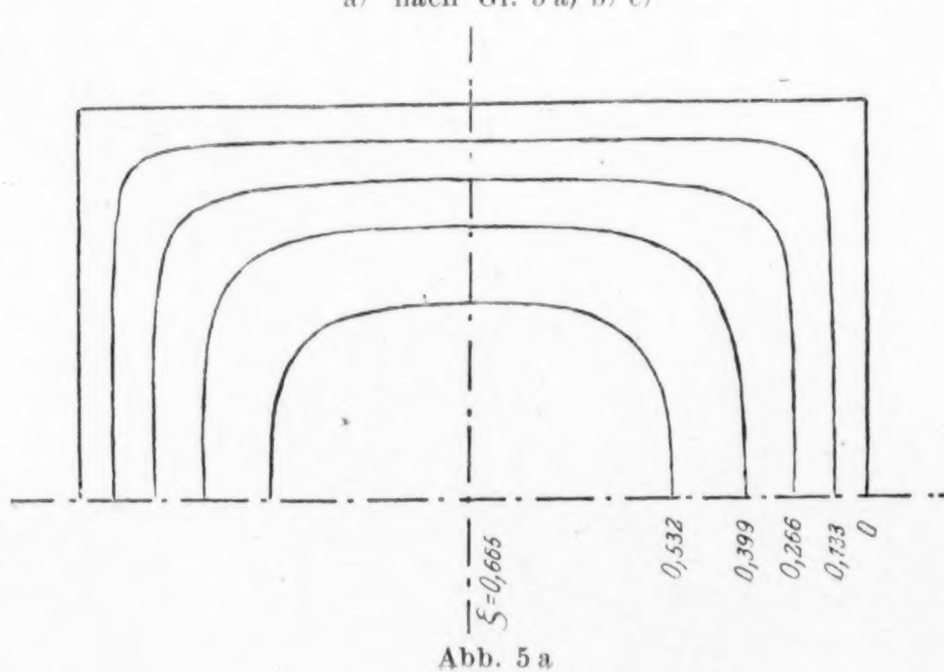


Abb. 5 a

5. Platten mit nicht verschwindender Biegungssteifigkeit. Zur Berechnung von Platten mit nicht verschwindender Biegungssteifigkeit müssen wir auf die Differentialgleichung (4) zurückgreifen.

Schreiben wir
$$p' = -\left(T_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\, T_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right) \quad \ldots\ldots (12),$$
so erhalten wir
$$\frac{m^2 E J}{m^2 - 1}\left\{\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\, \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right\} = p - p' \quad \ldots\ldots (13).$$

p' können wir als den Teil der Belastung denken, welcher von den in der Platte vorhandenen Zug- und Schubspannungsresultanten aufgenommen wird, ohne daß die Biegungsfestigkeit dabei ins Spiel käme.

Höhenschichtenkarte der verzerrten Mittelfläche der Platte b) nach Gl. 1)

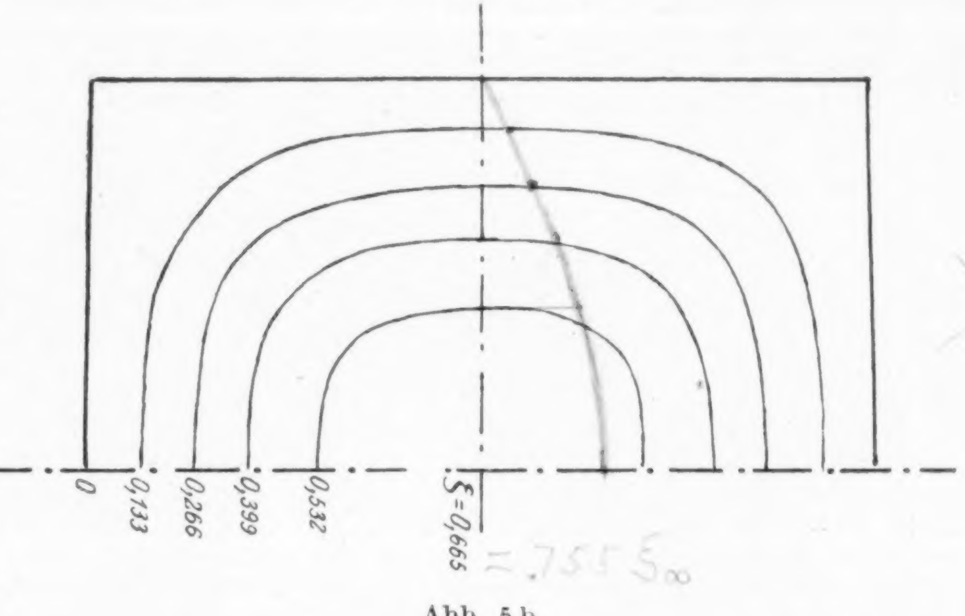


Abb. 5 b

Eine Berechnung derartiger Platten ist nur möglich, wenn das Verhältnis $\left(\frac{a}{h}\right)^4 : \left(\frac{E}{p}\right)$ bekannt ist, so daß man daran denken könnte, Kurventafeln für verschiedene Werte dieses Verhältnisses zu berechnen. Hier wollen wir uns jedoch nur mit der Frage beschäftigen, inwieweit unsere Annahme einer Platte ohne Biegungssteifigkeit berechtigt ist. Darüber gibt Gl. (12) Auskunft. Bei der freigelagerten Platte ist nämlich am Rand $T_{xy} = 0$ und die Ausdrücke $T_x \frac{\partial^2 z}{\partial x_2}$ sowie $T_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ verschwinden ebenfalls; wie klein auch das Trägheitsmoment der Platte sein mag, so tritt doch eine Entlastung der biegungssteifen Platte infolge der Verzerrung der Mittelfläche unmittelbar am Rand nicht ein. Bei der eingespannten und gleichzeitig festgehaltenen Platte tritt auch an den Rändern eine Entlastung ein, welche aber an den Ecken der Platte verschwindet. Es ergibt sich daraus, daß unsere Berechnung nur mit einer gewissen Einschränkung auf wirklich vorkommende Platten übertragen werden darf.

Der Mangel einer einwandfreien Lösung des Plattenproblems hat besonders bei der Beurteilung der Versuchsergebnisse sehr nachteilig gewirkt. Die Entlastung der Platte von Biegungsarbeit ist nämlich schon bei verhältnismäßig steifen Platten ein nicht zu vernachlässigender Umstand. Sogar bei einer freigelagerten Platte bildet sich an den Rändern ein Druckring aus, in welchen sich der mittlere Teil der Platte gewissermaßen einhängt.

Zu beachten ist auch, daß sich die Fülle von Einspannungs- und Auflagerrungsmöglichkeiten allein durch Einführung erfahrungsmäßiger Berichtigungskoeffizienten wohl nicht bewältigen läßt.

Es wäre sehr zu begrüßen, wenn auch für mühsame, aber praktisch wichtige rechnerische Arbeiten auf dem Gebiet der Festigkeitslehre Mittel bereitgestellt würden, wie es für Versuchszwecke längst geschieht, denn beide Arbeitsrichtungen können nur durch ihr Zusammenwirken wertvolle Ergebnisse zustande bringen. 4

Über die Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Balken[1].

Von **P. NEMÉNYI** in Budapest.

Die von Saint-Venant begründete Theorie der Torsion prismatischer Stäbe hat zu zahlreichen Methoden geführt, die für die Ermittlung der Spannungsverteilung in einem auf Torsion beanspruchten Stabe von beliebigem Querschnitt geeignet sind, oder die es mindestens ermöglichen, uns über diese eine zutreffende Vorstellung zu

[1]) Vorliegende Abhandlung ist eine, dem Wesen nach unveränderte deutsche Bearbeitung meines ungarischen Aufsatzes, welcher am 15. März l. J. der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt wurde.

bilden. Die hydrodynamischen Analogien [1]), die Prandtlsche Analogie mit der gespannten Membran [2]), die Hennebergschen Untersuchungen über die Verteilung der sogenannten Spannungsmassen [3]) und schließlich Runges, auf Grundlage der Prandtlschen Darstellungsweise aufgebautes, numerisch-graphisches Verfahren [4]) sind alle danach angetan, um — auf dem festen Boden der Saint-Venantschen Lösung —, eine richtige, entweder approximativ-numerische oder experimentell-anschauliche Lösung des Torsionsproblems zu bieten, auch für solche Stabquerschnitte, für welche die Lösung weder in geschlossener analytischer Form, noch in Form von Reihenentwicklungen gegeben werden kann.

Hingegen entbehrt die ebenfalls durch Saint-Venant begründete Theorie der Schubspannungen im Querschnitt des durch eine Einzellast gebogenen Stabes fast vollständig derartiger Methoden. Das in der Ingenieurpraxis vielfach benutzte, auf der willkürlichen Annahme der Affinität zwischen Querschnittsbegrenzung und Schubspannungstrajektorien beruhende, angebliche »Näherungsverfahren« verdient diese Bezeichnung durchaus nicht; nicht nur das Maß der etwaigen Annäherung bleibt uns bei diesem Verfahren vollständig unbekannt, sondern es führt schon in den allereinfachsten Fällen, z. B. beim Rechteck, auf Ergebnisse, die der richtigen Lösung sogar qualitativ widersprechen [5]). Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, diese Lücke der Elastizitätslehre auszufüllen, d. h. eine Methode zu entwickeln, die, an den Ergebnissen der Saint-Venantschen Theorie festhaltend, Näherungslösungen für die Verteilung der Schubspannungen im gebogenen Balken bei — zur Lastrichtung symmetrischen, sonst aber ganz beliebigen — eventuell zeichnerisch gegebenen Querschnitten ermöglicht.

Die Schwierigkeit, die in der Biegungstheorie gegenüber der Torsionstheorie besteht, hat darin ihren Grund, daß man zwar in beiden Fällen die Ermittlung der Spannungsverteilung auf die Aufsuchung einer, einer einfachen Differentialgleichung genügenden, Spannungsfunktion zurückführen kann, daß aber die Randbedingung, der diese Funktion genügen muß, im Falle der Biegung sehr unübersichtlich und verwickelt erscheint. Es gelingt nun im folgenden (**1**), eine allgemeinere Spannungsfunktion F für das Biegungsproblem zu definieren, die noch von zwei willkürlichen Größen φ_1 und φ_2 abhängt. Wie immer über diese Größen verfügt wird, auf jeden Fall wird die Differentialgleichung nur wenig verändert, während die Randbedingung die denkbar einfachste Form annimmt, nämlich in der unmittelbaren Vorgabe der Randwerte der gesuchten Funktion besteht; die Randwerte sind hierbei durch eine einfache Quadratur aus der Gestalt des Querschnittes abzuleiten. In **2** wird eine erste Annahme für φ_1 und φ_2 erörtert, in **3** eine zweite, bei der die Differentialgleichung für F die Laplacesche wird, so daß man — analog dem Prandtlschen Gleichnis in der Torsionstheorie — eine experimentelle Lösung des Biegungsproblems durch Herstellung eines gespannten Flüssigkeitshäutchens gewinnen kann. Natürlich ist in allen Fällen das numerisch-graphische Verfahren, das Runge zur Lösung des Torsionsproblems gewählt hat, auf die hier eingeführte Spannungsfunktion anwendbar. In **4** werden die Folgerungen aus dem neuen Ansatz für den Fall der »Grashofschen Querschnitte« gezogen und die Richtlinien der weiter in Angriff zu nehmenden Arbeiten angedeutet.

1. Einführung einer allgemeinen Spannungs-Funktion F. Ich wähle als Ausgangspunkt folgendes Ergebnis der Saint-Venantschen Biegungstheorie: Nehmen wir die Symmetrieachse des Querschnittes — welche mit der Lastrichtung zusammenfällt — zur y-Achse und die dazu senkrechte Schwerpunktsachse zur x-Achse, so lassen sich die Schubspannungskomponenten folgendermaßen durch eine Spannungsfunktion Ψ ausdrücken [6]):

---

[1]) Love-Timpe, Lehrbuch d. Elastizität, Leipzig 1907, S. 364.

[2]) Jahresb. d. deutschen Math. Vereinigung, Bd. 13, 1904, S. 31.

[3]) Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 51, 1904, S. 242.

[4]) Zeitschr. f. Math. u. Physik, Bd. 56, 1908, S. 225.

[5]) Love-Timpe, S. 309. Love beweist im Anschluß an die Grashofschen Untersuchungen, daß der durch diese Methode erhaltenen Spannungsverteilung nur bei einer bestimmten dreidimensionalen Schar von Querschnittsbegrenzungen ein geometrisch möglicher Deformationszustand entspricht.

[6]) Hans Lorenz, Lehrbuch d. techn. Physik, Bd IV, München 1913, S. 440. Die Bezeichnung der Spannungskomponenten ist aber die Föpplsche, mit zwei Indices.

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz} &= C\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{y^2}{2} - \frac{2m-1}{2}x^2\right)\\ \tau_{xz} &= C\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - (2m+1)xy\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\Psi).$$

Hierin ist $C = \frac{1}{2m+1}\frac{P}{J_x}$, P die Last, $J_x = \iint\limits_{(F)} y^2\,dx\,dy$, das Trägheitsmoment in bezug auf die x-Achse und m der **Poissonsche** Modul. Die Funktion Ψ wird durch die partielle Differentialgleichung:

$$\varDelta_{xy}{}^2\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\varDelta)$$

und durch die Randbedingung

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{y^2}{2} - \frac{2m-1}{2}x^2}{\frac{\partial \Psi}{\partial x} - (2m+1)xy} = \frac{dy}{dx}$$

(die besagt, daß die Randspannung die Richtung des Randes hat) definiert. Letztere läßt sich auch wie folgt schreiben, wenn man den Differentialquotienten $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ nach der Normalen des Randes

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}ds = \frac{\partial \Psi}{\partial y}dx - \frac{\partial \Psi}{\partial x}dy$$

und den Winkel φ zwischen Randtangente und x-Achse einführt:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \cos\varphi\left(\frac{y^2}{2} + \frac{2m-1}{2}x^2\right) - \sin\varphi\,(2m+1)xy \quad \ldots \ldots \quad (d).$$

Diese Randbedingung läßt aber keine **unmittelbare** Folgerung in bezug auf die Randwerte der Funktion Ψ zu, und an diesem Umstande mußte bisher jeder Versuch scheitern, die Theorie in der Richtung der numerisch-graphischen oder sonstigen Approximationslösungen weiter auszubilden.

Um uns von dieser nachteiligen Randeigenschaft der Funktion Ψ zu befreien und um gleichzeitig auch einen tieferen Einblick in das Wesen des Problems zu gewinnen, ersetze ich das Gleichungssystem (Ψ) durch folgenden, allgemeineren Ansatz:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz} &= A_1\frac{\partial F}{\partial x} + B_1\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_1(x, y)\\ \tau_{xz} &= A_2\frac{\partial F}{\partial x} + B_2\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_2(x, y)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{F}),$$

wo φ_1 und φ_2 vorläufig unbekannte, von der Querschnittsform aber **nicht** abhängende Funktionen, A_1, A_2, B_1, B_2 aber ebensolche Konstanten sein sollen; und man sieht sofort, daß die spezielle Substitution $A_1 = B_2 = 0$, $A_2 = B_1 = C$; $\varphi_1 = -C\left(\frac{y^2}{2} + \frac{2m-1}{2}x^2\right)$ und $\varphi_2 = -C(2m+1)xy$ das Gleichungssystem (F) in (Ψ) überführt.

Für den allgemeinen Ansatz (F) wird die Grenzbedingung zu:

$$\frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \frac{A_1\frac{\partial F}{\partial x} + B_1\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_1(x, y)}{A_2\frac{\partial F}{\partial x} + B_2\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_2(x, y)} = \frac{dy}{dx} \quad \text{oder}$$

$$A_2\frac{\partial F}{\partial x}\sin\varphi + B_2\frac{\partial F}{\partial y}\sin\varphi - A_1\frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi - B_1\frac{\partial F}{\partial y}\cos\varphi = \varphi_1(x, y)\cos\varphi - \varphi_2(x, y)\sin\varphi.$$

Es ist klar, daß der Ausdruck auf der linken Seite dann und nur dann mit dem Differentialquotienten in Richtung der Berandung $\left(\text{d. h.: } \frac{\partial F}{\partial s}\right)$ übereinstimmt beziehungsw. diesem proportional ist, wenn $A_2 = B_1 = 0$ und $A_1 = -B_2 \neq 0$ [1]. Setzen wir die Konstante $A_1 = -B_2 = -1$ — was, wie man sofort einsieht, keine wesentliche Einschränkung mehr bedeutet — und $A_2 = B_1 = 0$, so nimmt unser Gleichungssystem (F) folgende Form an:

[1]) Würde man hingegen $A_1 = B_2 = 0$ und $A_2 = B_1 \neq 0$ setzen, so fiele die linke Seite proportional $\frac{\partial F}{\partial n}$ aus, also wäre der derart spezialisierte Ansatz (F) eine nur unwesentliche und von unserem Standpunkte aus zur Lösung des Problems nichts beitragende Verallgemeinerung des Ansatzes (Ψ).

$$\left.\begin{aligned}\tau_{yz} &= -\frac{\partial F}{\partial x} + \varphi_1(x, y)\\ \tau_{xz} &= \frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_2(x, y)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (F'),$$

die Randbedingung gestaltet sich dabei wie folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi = \frac{\partial F}{\partial s} = \varphi_1(x, y)\cos\varphi - \varphi_2(x\,y)\sin\varphi$$

und demzufolge (abgesehen von einer für unser Problem — im Falle einfach zusammenhängender Querschnitte — bedeutungslosen Konstanten):

$$F(s) = \int_0^s [\varphi_1(x, y)\cos\varphi - \varphi_2(x\,y)\sin\varphi]\,ds \quad \ldots\ldots \quad (d'),$$

wenn $F(s)$ den Wert der Funktion F an jenem Punkt der Berandung bedeutet, welcher von einem auf diesem angenommenen festen Punkt A die Bogenentfernung s aufweist. Die Funktion $F(s)$, d. h. der Verlauf von $F(x, y)$ längs des Randes, läßt sich durch graphische Integration ermitteln, sobald die Funktionen φ_1 und φ_2 gewählt sind und der Rand bekannt ist. Denken wir uns die so gefundenen Werte von F über den Randpunkten tatsächlich aufgetragen, so erhalten wir die Raumkurve, längs der die Fläche F die Mantelfläche schneidet.

Sehen wir nun zu, welcher partiellen Differentialgleichung die Funktion F genügt. Wenden wir auf F die Operation $\Delta_{xy}{}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ an:

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}{}^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\\ &= -C\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\,\partial y} + C(2m-1)x + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + C\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\,\partial y} - C(2m+1)x - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\\ &= -2Cx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad (\Delta').\end{aligned}$$

Wenn wir also ein für allemal ein Funktionenpaar φ_1, φ_2 annehmen, so läßt sich aus der partiellen Differentialgleichung (Δ') und der Randbedingung (d') für jede beliebige Berandung jene Funktion F bestimmen, aus der, vermittels des Gleichungssystems (F') die Schubspannungskomponenten sich ableiten lassen.

Die Funktionen φ_1 und φ_2 dürfen aber nicht ganz beliebig gewählt werden, wenn wir die Funktion F samt ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen kontinuierlich haben wollen. Nach einem wohlbekannten Satze ist die notwendige Bedingung dieser Kontinuitätseigenschaften: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$. Das verlangt aber einen gewissen Zusammenhang zwischen φ_1 und φ_2. Nämlich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \left(C\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - C(2m+1)y\right) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\\ = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \left(-C\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + Cy\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y},\end{aligned}$$

also

$$O = C\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - C(2m+1)y - Cy - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y},$$

woraus, unter Anwendung der Gleichung (Δ), folgt, daß

$$2C(m+1)y + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (K).$$

Die Funktionen φ_1 und φ_2 dürfen nur so gewählt werden, daß die Relation (K) erfüllt ist. Um nun unsere Ergebnisse vom Standpunkte der praktischen Lösung möglichst günstig zu gestalten, müssen wir über φ_1 und φ_2 — natürlich unter Berücksichtigung von (K) — zweckmäßig disponieren. Nachdem in Folge von (K) φ_1 und φ_2 **nicht beide** lineare Funktionen von x und y sein können, erscheint es mir zweckmäßig, **beide** Funktionen als homogene quadratische Funktionen der genannten Veränderlichen zu wählen, also:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2\\ \varphi_2(x, y) &= a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2\end{aligned}\right\},$$

dann erhält (K) folgende spezielle Form:

$$2\,C\,(m+1)\,y + 2\,a_2 x + b_2 y + b_1 x + 2\,c_1 y = 0$$

für alle reellen Wertpaare x, y; daher folgt:

$$\left.\begin{aligned} 2\,C\,(m+1) + b_2 + 2\,c_1 &= 0 \\ 2\,a_2 + b_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (K^*).$$

Im Folgenden werden wir — natürlich unter Berücksichtigung von (K*) — zwei — nach verschiedenen Gesichtspunkten zweckmäßige — Verfügungen über die homogen-quadratischen Funktionen φ_1 und φ_2 vornehmen. Im Falle der ersten Wahl entspricht jeder Berandung eine ganz bestimmte Funktion F, die wir zur Unterscheidung F_I nennen wollen, bei der zweiten Wahl eine andere ganz bestimmte Funktion, die F_{II} genannt werden soll.

2. Erste Verfügung über φ_1 und φ_2. Das einfachste Paar solcher homogen-quadratischer Funktionen, deren Koeffizienten dem Gleichungssystem (K*) genügen, ist $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = -\,2\,C\,(m+1)\,xy$. In diesem Falle ist:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\,2\,C\,(m+1)\,x.$$

Daher erhält das Hauptergebnis in **1** (siehe die Gleichungen (F'), (d'), ($\varDelta'$)) folgende speziellere Fassung: die Funktion F_I, aus welcher die Schubspannungskomponenten vermittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{\partial F_I}{\partial x} \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial F_I}{\partial y} - 2\,C\,(m+1)\,xy \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (F_I)$$

folgen, genügt in jedem inneren Punkte der Querschnittsfläche der partiellen Differentialgleichung

$$\varDelta_{xy}{}^2 F_I = \frac{\partial^2 F_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_I}{\partial y^2} = 2\,Cmx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\varDelta_I)$$

und nimmt in jedem Randpunkte des Querschnittes — von einer additiven Konstanten abgesehen — den Wert

$$F_I(s) = \int_0^s \lambda_I(s)\,ds = \int_0^s 2\,C\,(m+1)\,xy \sin\varphi\,ds \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d_I)$$

an. Die Kurve $F_I(s)$, in welcher die Fläche F_I die Mantelfläche des Prismas schneidet, läßt sich danach bei gewissen Querschnitten rechnerisch ermitteln, in allen Fällen, insbesondere bei nur zeichnerisch gegebenen, nach dem bekannten Verfahren graphischer Quadratur zeichnerisch bestimmen.

(Im Falle einer Querschnittsberandung, die aus lauter zu den beiden Koordinatenachsen x und y parallelen Geradenstücken besteht, — wie z. B. bei dem Reckteck und, abgesehen von den Abrundungen und Abstumpfungen, auch bei den technisch wichtigen T, I und Kreuzquerschnitten, — besteht die Raumkurve $F_I(s)$ aus lauter zur x-Achse parallelen Geradenstücken und aus Stücken von Parabelbögen zweiter Ordnung, wie man aus der Formel (d_I) sofort sieht.)

Durch obige Formulierung unserer Ergebnisse wird es nun sofort klar, daß zur Bestimmung der Funktion F_I, welche unmittelbar durch die Gleichungen (d_I) und ($\varDelta_I$) gegeben ist, genau dieselbe numerisch-graphische Methode anwendbar ist, welche Runge zur Bestimmung der die Prandtlsche Lösung des Torsionsproblems liefernde Funktion geschaffen hat. Man sieht sogar, daß man bei jedem beliebigen Querschnitt durch die Lösung des Torsionsproblems in seiner Prandtlschen Fassung und des Biegungsproblems in unserer obigen Fassung auf zwei solche lineare Gleichungssysteme geführt wird, welche miteinander ihrer »Struktur«[1]) nach vollständig übereinstimmen.

[1]) Die »Struktur« eines Gleichungssystems ist im wesentlichen eine graphostatische Begriffsbildung. Zwei Systeme von linearen Gleichungen werden dann als Gleichungssysteme übereinstimmender Struktur bezeichnet, wenn die Anzahl der Unbekannten übereinstimmt, und wenn die Gleichungen der beiden Systeme sich in eine ein-eindeutige Beziehung bringen lassen derart, daß in zwei korrespondierenden Gleichungen die nämlichen Unbekannten mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten behaftet sind. Leisten wir bei dem Aufstellen der Gleichungssysteme auf die eventuelien Symmetrie-Vereinfachungen Verzicht, so ist in diesem Sinne die Gleichheit der Struktur der beiden im Texte erwähnten Gleichungssysteme unmittelbar einleuchtend.

3. Andere Verfügung über φ_1 und φ_2. Zu einer andern Lösungsmethode gelangen wir, indem wir setzen: $\varphi_1 = C[x^2 - (m+1)y^2]$; $\varphi_2 = 0$, also $a_1 = C, b_1 = 0, c_1 = -C(m+1)$; $a_2 = b_2 = c_2 = 0$; womit die Bedingung (K*) befriedigt ist. In diesem Falle ist:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 2\,Cx; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0$$

und man sieht sofort, daß in diesem Falle das entsprechende F, das zur Unterscheidung F_{II} genannt werden soll, der Laplaceschen Differentialgleichung zu genügen hat.

Das Hauptergebnis in **1** (siehe die Gleichungen (F'), (d'), (Δ')) erhält also hier folgende spezielle Fassung: die Funktion F_{II}, aus welcher die Schubspannungskomponenten vermittelst der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= -\frac{\partial F_{II}}{\partial x} + C\,(x^2 - (m+1)\,y^2) \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial F_{II}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (F_{II})$$

folgen, genügt in jedem inneren Punkte der Querschnittsfläche der Laplaceschen Differentialgleichuug

$$\Delta_{xy}{}^2 F_{II} = \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_{II}}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\Delta_{II})$$

und nimmt in jedem Randpunkte des Querschnitts — von einer additiven Konstanten abgesehen — den Wert

$$F_{II}(s) = \int_0^s \lambda_{II}(s)\,ds = \int_0^s C\,(x^2 - (m+1)\,y^2)\cos\varphi\,ds \quad \ldots\ldots \quad (d_{II})$$

an. Die Kurve $F_{II}(s)$, in welcher die Fläche F_{II} die Mantelfläche des Prismas schneidet, läßt sich ebenso wie $F_I(s)$ durch einfache Quadratur bestimmen. (Im Falle einer aus lauter zu den beiden Koordinatenachsen x und y parallelen Geradenstücken bestehenden Querschnittsberandung besteht die Kurve $F_{II}(s)$ aus lauter zur y Achse parallelen Geradenstücken und aus Stücken von Parabeln III. Ordnung, wie aus Gl. (d_{II}) sofort ersichtlich ist.)

Die Grenzbedingung ist hier etwas weniger einfach als bei der in 2. erörterten Methode mit der Funktion F_I; daß wir trotzdem auch F_{II} einführten, ist dadurch begründet, daß F_{II} der Laplaceschen Differentialgleichung genügt. Dieser Umstand ermöglicht uns eine experimentelle Darstellung der Fläche F_{II}.

Stellen wir eine ganz beliebig geschlossene Raumkurve durch einen dünnen, in sich zurückkehrenden Draht dar und tauchen denselben in eine Seifenlösung, so spannt sich auf den Draht eine Flüssigkeitsmembran, welche — von der geringfügigen störenden Wirkung der Schwerkraft abgesehen — die Form einer sogenannten Minimalfläche besitzt, also einer durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

gekennzeichneten Fläche[1]) (wo ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien bedeuten).

Wenn wir für diese Minimalfläche die Gleichung $f = f(x, y)$ einführen, so läßt sich — (wie es in der Differentialgeometrie gezeigt wird) — Gl. (m) in folgender Form anschreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}}\right] = 0$$

oder nach einiger Umformung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Aus dieser letzteren Form folgt, daß, sobald die Minimalfläche f so flach geneigt ist, daß die Quadrate und das Produkt aus $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ der Einheit gegenüber vernach-

[1]) siehe z. B. das Kompendium der theor. Physik von Woldemar Voigt, Bd. I, S. 248.

lässigt werden dürfen, sie mit zureichender Genauigkeit der Laplaceschen Differentialgleichung genügt.

Stellen wir daher vermittelst des oben angeführten Kapillarexperimentes jene Minimalfläche f her, welche die dem vorgelegten Stabquerschnitt entsprechende Raumkurve $F_{II}(s)$ enthält, und sehen wir, daß die derart gewonnene Fläche eine geringe Neigung zur x, y-Ebene aufweist, so wissen wir, daß diese Minimalfläche annähernd die Laplacesche Differentialgleichung befriedigt; daher stimmt Fläche f mit F_{II} genau in der Grenzbedingung und näherungsweise in der Differentialgleichung überein, so daß die Fläche f eine Näherungslösung unseres Problems liefert.

Hat hingegen die zur Raumkurve $F_{II}(s)$ gehörende Minimalfläche f irgendwo eine so große Neigung, daß Quadrate und Produkt von $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht vernachlässigt werden dürfen, so müssen wir für unser Biegungsproblem eine andere approximative Lösungsmethode suchen. Als eine solche bietet sich auch hier Runges numerisch-graphisches Verfahren dar, welches auch hier — wie sofort einzusehen — auf ein Gleichungssystem gleicher Struktur führt, wie das Torsionsproblem in seiner Prandtlschen Fassung und das Biegungsproblem in seiner in 2. von uns entwickelten Formulierung.

Eine weitere Näherungsmethode erhält man, wenn man diese numerisch-graphische Methode mit der obigen experimentellen Methode derart kombiniert, daß man die Gitterpunktwerte der experimentell ermittelten Funktion f als erste Annäherungswerte für die Lösung unseres Rungeschen Gleichungssystems betrachtet und von da aus mit dem bekannten Iterationsverfahren bis zum vorgeschriebenen Genauigkeitsgrade fortschreitet.

4. Anwendung auf den Grashofschen Querschnitt. Weiterer Ausblick.

Zum Schluß will ich eine Bemerkung über die geschlossene Raumkurve $F_{II}(s)$ machen, diese Bemerkung auf eine spezielle Querschnittsform, den sogenannten Grashofschen Querschnitt, anwenden und für diesen das Spannungsproblem lösen.

Die Kurve $F_{II}(s)$ ist bekanntlich eine ebene Kurve, falls die Determinante

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dF_{II}}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2F_{II}}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3F_{II}}{ds^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & C\frac{dx}{ds}(x^2-(m+1)y^2) \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & C\frac{d}{ds}\left[\frac{dx}{ds}(x^2-(m+1)y^2)\right] \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & C\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{dx}{ds}(x^2-(m+1)y^2)\right] \end{vmatrix}$$

für jeden beliebigen Wert des Parameters s gleich 0 ist.

Setzen wir also die Determinante $\Delta(s)$ gleich 0, nehmen wir ferner zur hierdurch erhaltenen Gleichung die Identität $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$ hinzu, und lösen wir dieses System von Differentialgleichungen auf, so erhalten wir eine mehrdimensionale Schar solcher Querschnittskurven, für welche die Kurve $F_{II}(s)$ eine ebene Kurve und demzufolge — wie man unter Heranziehung der Gleichung (Δ_{II}) unmittelbar folgert — die Fläche F_{II} eine Ebene ist; für jede solche Querschnittsbegrenzung ist also das Spannungsproblem elementar lösbar. Von dieser mehrdimensionalen Kurvenschar greifen wir eine eindimensionale Hyperbelschar mit der Gleichung

$$x^2 - (m+1)\,y^2 = -k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(h)}$$

— wo k der Parameter der Kurvenschar — heraus; man sieht sofort, daß für jede Hyperbel dieser Schar die dritte Kolonne der Determinante $\Delta(s)$ mit der ersten übereinstimmt und daher die Bedingung $\Delta(s) = 0$ in der Tat befriedigt ist. Weiter ist es leicht einzusehen, daß auch dem hieraus gebildeten sogenannten Grashofschen Querschnitt [1]) — (oben und unten begrenzt durch die beiden Aeste einer der Hyperbeln (h), an den beiden anderen Seiten durch zwei zur y-Achse parallel und symmetrisch gelegenen Geraden) — die Eigenschaft zukommt, daß die ihm entsprechende Kurve $F_{II}(s)$ einer einzigen Ebene angehört. Diese Ebene, welche gleichzeitig die Fläche F_{II} liefert, wird, wie leicht nachweisbar, durch die Gleichung

$$F_{II} = C k^2 x$$

[1]) siehe z. B. Lorenz, a. a. O., S. 442.

dargestellt; sie enthält also die y-Achse und gibt die Lösung des Biegungsproblems für den Grashofschen Querschnitt, nämlich nach (F_{II}):

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial F_{II}}{\partial x} + C(x^2 - (m+1)y^2) = -Ck^2 + C(x^2 - (m+1)y^2)$$
$$= C(x^2 - (m+1)y^2 - k^2)$$
$$\tau_{xz} = \frac{\partial F_{II}}{\partial y} = 0.$$

Wir sind damit auf ganz anderem Wege zu dem bekannten Grashofschen Ergebnis gelangt. —

Die in denselben Problemkreis fallenden weiteren Erörterungen werden nun zunächst zwei Ziele zu verfolgen haben:

1) Die tatsächliche Lösung des Biegungsproblems auf Grund der Ergebnisse von **2** und **3** mit Hilfe unserer Funktionen F_I und F_{II} für technisch wichtige und bisher der exakten Lösung unzugängliche Querschnitte — in erster Linie für das **T**, das **I**, das kreuzförmige und das Zorès-Profil; ferner für theoretisch interessante Querschnitte, so in erster Linie das Rechteck und das diagonal gestellte Quadrat. Bei diesen letzteren wird sich ein Vergleich der derart zu gewinnenden Ergebnisse mit den Ergebnissen der willkürlichen »Näherungsmethode« (siehe Einleitung und Fußn. 5, S. 90) darbieten.

2) Die Erweiterung des Rungeschen graphisch-numerischen Lösungsverfahrens des Torsionsproblems[1]) auf zweifach und mehrfach zusammenhängende Querschnitte; Anwendung hiervon auf den Stab mit rahmenförmigem Querschnitt (rechteckiges Hohlprisma) und die analoge Untersuchung in bezug auf das Biegungsproblem, ebenfalls unter Anwendung auf das rechteckige Hohlprisma. 5

Über eine Eigenschaft der ballistischen Kurve und ihre Anwendung auf die Integration der Bewegungsgleichungen.

Von **K. POPOFF** in Sofia.

Henri Poincaré hat in zwei seiner Arbeiten, nämlich in den »Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste« und in den »Leçons de Mécanique céleste«, wertvolle Methoden zur Integration der Differentialgleichungen der Himmelsmechanik angegeben. Im folgenden soll versucht werden, diese Methoden auch auf die Differentialgleichungen der Ballistik anzuwenden. Während aber alle in der Himmelsmechanik auftretenden Kräfte sich aus einem Potential ableiten lassen, gibt in der Ballistik die Reibung dem Problem eine gänzlich veränderte Gestalt. Sieht man ferner die Reibungskräfte als die »störenden Kräfte« im Sinne der Himmelsmechanik an, so sind diese hier unverhältnismäßig viel größer als in der Himmelsmechanik.

Für das Problem der Himmelsmechanik findet nun Poincaré folgendermaßen eine allgemeine Lösung. Er ermittelt zunächst Hilfslösungen (solutions intermédiaires), die Eigenschaften haben, die einem Spezialfall des Problems entsprechen, aber bis zu einem gewissen Grade auch im allgemeinen Falle auftreten müssen. Von diesen, übrigens bei ihm periodischen oder asymptotischen, Hilfslösungen geht er dann mit Hilfe der sogen. Störungsgleichungen (équations aux variations) zur Lösung des allgemeinen Problems über.

Es kann der Fall eintreten, daß die Anfangsbedingungen der gesuchten Bewegung nur wenig von denen abweichen, welche einer (periodischen) Hilfslösung entsprechen. In diesem Falle kann man diese Lösung als erste Näherung der wahren Lösung be-

[1]) Runges numerisch-graphisches Verfahren ließe sich ganz unverändert auf mehrfach zusammenhängende Querschnitte übertragen, falls man im vorhinein für jede innere geschlossene Randkurve des mehrfach zusammenhängenden Querschnittes den ihr eigenen konstanten Wert der Funktion $u(x, y)$, — also bei einem n-fach zusammenhängenden Querschnitte $n-1$ Konstante — kennen würde; dies ist aber zunächst nicht der Fall. Die Ueberwindung der hierin liegenden Schwierigkeit und damit die Verallgemeinerung der Rungeschen Lösung des Torsionsproblems auf beliebig-vielfach zusammenhängende Querschnitte bildet den Gegenstand einer in Vorbereitung befindlichen Abhandlung des Verfassers.

trachten. Es bezeichnen etwa x_1, x_2 x_3 die Koordinaten der bewegten Punkte, t die Zeit, h_1, h_2 .... h_p irgend welche Parameter und es sei

$$x_1 = \varphi_1 (t;\ h_1,\ h_2,\ h_3 \ldots\ h_p)$$
$$x_2 = \varphi_2 (t;\ h_1,\ h_2,\ h_3 \ldots\ h_p)$$
$$x_3 = \varphi_3 (t;\ h_1,\ h_2,\ h_3 \ldots\ h_p)$$

für bestimmte Werte der h_1, h_2 .... h_p die Hilfslösung der Poincaréschen Theorie als erste Näherungslösung. Dann werden durch $x_1 = \varphi_1 + \xi_1$, $x_2 = \varphi_2 + \xi_2$ usw. die Koordinaten der betrachteten Punkte in der wahren Bewegung dargestellt, und es lassen sich die Differenzen ξ_k in der Form schreiben:

$$\xi_k = A_1 \frac{\partial \varphi_k}{\partial h_1} + A_2 \frac{\partial \varphi_k}{\partial h_2} + \ldots + A_p \frac{\partial \varphi_k}{\partial h_p},$$

wo man die Konstanten A_1, A_2 ... als kleine Verbesserungen δh_1, δh_2 ... betrachten kann, die man an den ursprünglichen h_1, h_2 ... anzubringen hat, um die wahre Bewegung zu erhalten.

Für das ballistische Problem haben periodische Lösungen keinerlei Intesesse, da die Ballistik ja nur den Anfang der Bahn des Körpers untersucht. Gestützt auf Poincarés Methoden, habe ich nun für das Problem der Ballistik Hilfslösungen ermittelt, die unmittelbare Vorteile bieten, indem sie charakteristische Eigenschaften besitzen, die bei gewissen, in der Entwicklung der Ballistik häufig diskutierten Widerstandsgesetzen auftreten. Ich habe weiter zu verdeutlichen gesucht, welchen Einfluß die Aenderung des Widerstandsgesetzes auf die in Rede stehende Eigenschaft, die »Affinität der Bahnkurven«, hat, eine Eigenschaft übrigens, die aufmerksamen Beobachtern nicht entgangen ist. Es ist mir schließlich auf Grund dieser Hilfslösung gelungen, die **Bewegungsgleichungen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen durch Quadraturen zu integrieren**, ohne die Gleichung des Hodographen einzuführen. Dabei erscheinen die Ausdrücke für die Koordinaten des Geschosses in drei verschiedenen Formen, nämlich als Reihen, welche nach Potenzen 1) von $\sin^2 \frac{\varphi}{2}$, 2) von $\sin^2 \frac{\psi}{2}$, 3) von $\sin \alpha$ fortschreiten, wo α der Abgangswinkel gegen den Horizont und $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$, $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ist.

1. Erste Näherung für flache Bahn. Ich schicke zunächst eine allgemeine Bemerkung voraus. Es handle sich um die Bewegung eines Punktes mit den Koordinaten x, y. Wählt man die Achsen des Koordinatensystems derart, daß die Anfangsbedingungen einzelne der gegebenen Konstanten (Anfangslage, Anfangsgeschwindigkeit) nicht explizit enthalten und sind diese auch in den Differentialgleichungen der Bewegung nicht enthalten, so werden die Integrale von den betreffenden Konstanten nicht abhängen. In unserem Falle brauchen wir nur die y-Achse parallel zur Richtung der Anfangsgeschwindigkeit und die x-Achse durch die Anfangslage des bewegten Punktes zu legen. Die Anfangsbedingungen sind dann, wenn mit Accenten die Ableitungen nach der Zeit bezeichnet werden:

$$t = 0,\ x = x_0,\ y = 0,\ x' = 0,\ y' = v_0,$$

und die Integrale haben die Gestalt:

$$x = \varphi_1 (v_0, x_0, t),\ y = \varphi_2 (v_0, x_0, t),$$

unabhängig vom Abgangswinkel α. Es genügt also in diesem Falle, eine beliebige der Bahnkurven bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu kennen, da durch sie alle anderen Bahnkurven mit derselben Anfangslage und derselben Anfangsgeschwindigkeit gegeben sind.

Nunmehr wenden wir uns dem Hauptproblem der äußeren Ballistik zu, nämlich der Untersuchung der Bewegung eines Punktes unter dem Einfluß der Schwere in einem widerstehenden Mittel. $\Phi (v)$ gebe den Widerstand des Mittels (d. h. die Wider-

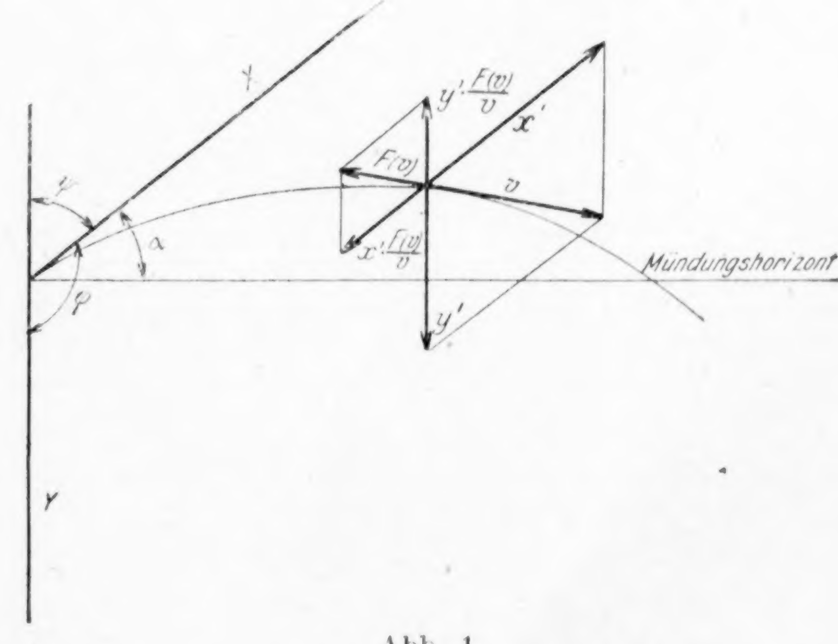


Abb. 1

standskraft pro Masseneinheit) in seiner Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v des Punktes an. Wählt man die Mündung des Geschützrohres zum Anfangspunkt des Koordinatensystems, und sind die Richtungen der x- und y Achse durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bezw. die abwärts gerichtete Vertikale gegeben, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung (vergl. Abb. 1 auf S. 97), da die drei Seiten des Kräftedreieckes, in dem Φ zerlegt wird, sich wie $v : x' : y'$ verhalten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt}\frac{\Phi(v)}{v}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{dy}{dt}\frac{\Phi(v)}{v}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \; x = 0, \; y = 0, \; x' = v_0, \; y' = 0.$$

Die Geschwindigkeit ist nach Abb. 1 durch die Gleichung gegeben:

$$v^2 = x'^2 + y'^2 - 2\,x'\,y' \sin\alpha = (x' + y')^2 - 4\,x'\,y' \sin^2\frac{\varphi}{2},$$

wo α die Abgangswinkel und $\varphi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ist.

Unter der Voraussetzung, daß sich $f(v) = \frac{\Phi(v)}{v}$ in eine nach ganzen, positiven Potenzen von v fortschreitende Reihe entwickeln läßt, ist eine Entwicklung auch möglich nach Potenzen von $\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Denn da x' und y' reell sind, hat man

$$(x' - y')^2 = (x' + y')^2 - 4\,x'\,y' > 0$$

und da x' und y' bei unserer Wahl der Koordinaten immer positiv sind,

$$1 \geqq \frac{4\,x'\,y'}{(x' + y')^2} \geqq 0.$$

Es ist also möglich, den Ausdruck für die Geschwindigkeit:

$$v = (x' + y')\sqrt{1 - \frac{4\,x'\,y'}{(x' + y')^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

und damit auch $f(v)$ in eine nach geraden Potenzen von $\sin\frac{\varphi}{2}$ fortschreitende Reihe zu entwickeln. Diese Reihe konvergiert sehr schnell wegen des Faktors $\sin^2\frac{\varphi}{2}$ bei $\frac{4\,x'\,y'}{(x' + y')^2}$, und zwar besonders gut für sehr kleine oder sehr große t, da y' für kleine t fast verschwindet und x' sehr groß ist, während für große t das Umgekehrte der Fall ist. Im ersten Falle wird $\frac{4\,x'\,y'}{(x' + y')^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}$ klein von der Ordnung $\frac{y'}{x'}\sin^2\frac{\varphi}{2}$ und im zweiten Falle klein von der Ordnung $\frac{x'}{y'}\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Diese gute Konvergenz erklärt die auf den ersten Blick sehr auffallende Tatsache, daß schon das erste Glied unserer Entwicklung die Bewegung mit überraschend guter Annäherung darstellt. Die beiden ersten Glieder der Reihe mögen hier angegeben werden. Setzt man $x' + y' = w$, so wird:

$$f(v) = f(w) - f'(w)\,w\,\frac{2\,x'\,y'}{(x' + y')^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)}.$$

Mit Rücksicht auf diesen Ausdruck für $f(v)$ erhält man für die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -\,x'\left[f(w) - f'(w)\,\frac{2\,x'\,y'}{w}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \ldots\right] \\ \frac{dy'}{dt} &= g - y'\left[f(w) - f'(w)\,\frac{2\,x'\,y'}{w}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \ldots\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \text{(A)}.$$

Nunmehr liefert die Vernachlässigung der mit $\sin^2\frac{\varphi}{2}$ multiplizierten Glieder eine Näherungslösung. Die Bewegungsgleichungen werden dann

$$\frac{dx'}{dt} = -\,x'\,f(w), \quad \frac{dy'}{dt} = g - y'\,f(w) \quad \ldots \ldots \ldots \text{(B)}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \; x = 0, \; y = 0, \; x' = v_0, \; y' = 0.$$

Offenbar enthalten weder die Bewegungsgleichungen noch die Anfangsbedingungen den Abgangswinkel α; dementsprechend tritt dieser Winkel auch in den Ausdrücken für

x und y nicht auf, und diese sind Funktionen, die allein von t und der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abhängen. Um sie zu finden, addieren wir die Gleichungen (B) und erhalten:

$$\frac{dw}{dt} = g - w\,f(w),$$

also:

$$t = \int_{v_0}^{w} \frac{dw}{g - w\,f(w)}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach w auf, so finden wir

$$w = x' + y' = F(v_0, t).$$

Eine abermalige Integration gibt

$$x + y = \int_0^{x+y} d(x+y) = \int_0^t F(v_0, t)\,dt.$$

Aus den Gleichungen (B) erhält man

$$x' = v_0\,e^{-\int_0^t f(w)\,dt}, \quad y' = -\,v_0\,e^{-\int_0^t f(w)\,dt} + F(v_0, t)$$

und schließlich hieraus durch eine letzte Integration:

$$x = x(v_0, t), \quad y = y(v_0, t).$$

Um von diesen Näherungskurven zu den anderen Bahnkurven übergehen zu können, hat man den Einfluß der vernachlässigten Glieder zu untersuchen. Ich führe die Rechnung hier nur für das Glied

$$-f'(w)\,w\,\frac{2\,x'\,y'}{(x'+y')}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

durch, da sie für die weiteren Glieder in genau derselben Art geschieht.

2. Zweite Näherung; Zusätze. $x + \delta x'$ und $y' + \delta y'$ seien die Werte von x und y', die man erhält, wenn man in den Bewegungsgleichungen auch die Glieder mit dem Faktor $\sin^2\frac{\varphi}{2}$ berücksichtigt. Die Vernachlässigung der Quadrate und Produkte der Größen $\delta x'$, $\delta y'$ und $\sin^2\frac{\varphi}{2}$ liefert, unter Berücksichtigung der Gleichungen (B), die folgenden Gleichungen:

$$\frac{d\,\delta x'}{dt} = -\,x'\,f'(w)\,\delta w - \delta x'\,f(w) + x' f'(w)\,\frac{2\,x'\,y'}{w}\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{d\,\delta y'}{dt} = -\,y' f'(w)\,\delta w - \delta y' f(w) + y' f'(w)\,\frac{2\,x'\,y'}{w}\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Diese Gleichungen sind linear in $\delta x'$ und $\delta y'$, und ihre Koeffizienten sind bekannte Funktionen der Zeit. Ihre Integrale enthalten $\sin^2\frac{\varphi}{2}$ als Faktor, wie man ohne weiteres erkennt, wenn man

$$\delta x' = \xi' \sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad \delta y' = \eta' \sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad \delta w = (\xi' + \eta')\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

setzt. Durch diese Substitutionen gehen obige Gleichungen in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -\,x' f'(w)\,(\xi' + \eta') - \xi' f(w) + x' f'(w)\,\frac{2\,x'\,y'}{w} \\ \frac{d\eta'}{dt} &= -\,y' f'(w)\,(\xi' + \eta') - \eta' f(w) + y' f'(w)\,\frac{2\,x'\,y'}{w} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{(C)}.$$

Die Lösung dieser Gleichungen kann auf einfache Quadraturen zurückgeführt werden, denn durch Addition der Gleichungen erhält man die in $(\xi' + \eta')$ lineare Gleichung erster Ordnung:

$$\frac{d(\xi' + \eta')}{dt} = -\,[f(w) + w\,f'(w)]\,(\xi' + \eta') + f'(w)\,2\,x'\,y'.$$

Hat man $\xi' + \eta'$ gefunden, so erhält man $\xi + \eta$, ξ', ξ, η' und η durch einfache Integrationen. Setzt man nämlich $\xi' + \eta' = \zeta(t)$, so nimmt z. B. die erste der Gleichungen (C) die Form an:

$$\frac{d\xi'}{dt} + \xi' f(w) + x' f'(w)\,\zeta(t) - x' f'(w)\,\frac{2\,x'\,y'}{w} = 0.$$

Diese in ξ' lineare Gleichung erster Ordnung kann durch einfache Quadraturen nach ξ' und weiter nach ξ aufgelöst werden.

Berücksichtigt man in gleicher Weise die Glieder zweiten und höheren Grades in der Entwicklung von $\varphi(v)$ nach Potenzen von $\sin^2\frac{\varphi}{2}$, so erhält man in den Ausdrücken für x, x' y und y' Glieder mit den Faktoren $\sin^4\frac{\varphi}{2}$, $\sin^6\frac{\varphi}{2}$ usw.

Zusatz 1. Wechsel der unabhängig Veränderlichen. Für die praktische Verwertung empfiehlt es sich, w als unabhängige Veränderliche zu betrachten, denn man erspart dann die Auflösung der Gleichung

$$t = \int_{v_0}^{w} \frac{dw}{g - w f(w)} = \Theta(w)$$

nach w. Man berechnet ein für alle Mal Tafeln, die die Werte dieser Funktion $\Theta(w)$ für die verschiedenen Werte der Variablen w enthalten, und benutzt diese Tafeln für die Berechnung weiterer Bahnelemente.

Die Einführung dieser Variablen w führt unsere Resultate in folgende über:

$$x' = v_0 e^{-\int_{v_0}^{w} f(w)\Theta'(w)\,dw}, \quad y' = -v_0 e^{-\int_{v_0}^{w} f(w)\Theta'(w)\,dw} + w,$$

$$x = v_0 \int_{v_0}^{w} \Theta'(w) e^{-\int_{v_0}^{w} f(w)\Theta'(w)\,dw}\,dw, \quad y = \int_{v_0}^{w} w\,\Theta'(w)\,dw - v_0 \int_{v_0}^{w} \Theta'(w) e^{-\int_{v_0}^{w} f(w)\Theta'(w)\,dw}\,dw$$

$$\frac{d(\xi' + \eta')}{dw} = -\Theta'(w)\left[f(w) + w f'(w)\right](\xi' + \eta') + \Theta'(w) f'(w)\, 2\, x' y'$$

usw.

Dabei sind x', y', ξ', η' die Ableitungen von x, y, ξ, η nach der Zeit, $\Theta'(w)$ dagegen die Ableitung von $\Theta(w)$ nach w: $\Theta'(w) = \frac{d\,\Theta(w)}{dw} = \frac{1}{g - w\,\varphi(w)}$.

Zusatz 2. Andere Herleitung des Resultats. Wir bewiesen die Möglichkeit, x und y auszudrücken durch die Reihen

$$\left.\begin{aligned} x &= a_0 + a_1 \sin^2\frac{\varphi}{2} + a_2 \sin^4\frac{\varphi}{2} + \dots \\ y &= b_0 + b_1 \sin^2\frac{\varphi}{2} + b_2 \sin^4\frac{\varphi}{2} + \dots \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad \text{(II)}$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \dots, b_0, b_1, b_2 \dots$, die Funktionen allein der Zeit sind. Weiß man dies einmal, so kann man diese Koeffizienten auch auf einem andern Wege gewinnen. Setzt man nämlich die Werte (II) für x und y in die Gleichungen (A) ein und vergleicht man die Koeffizienten gleicher Potenzen von $\sin^2\frac{\varphi}{2}$, so erhält man eine Reihe von Gleichungspaaren, welche die Koeffizienten a und b der Reihe nach zu bestimmen gestatten. Diese Methode ist in der Praxis vorzuziehen.

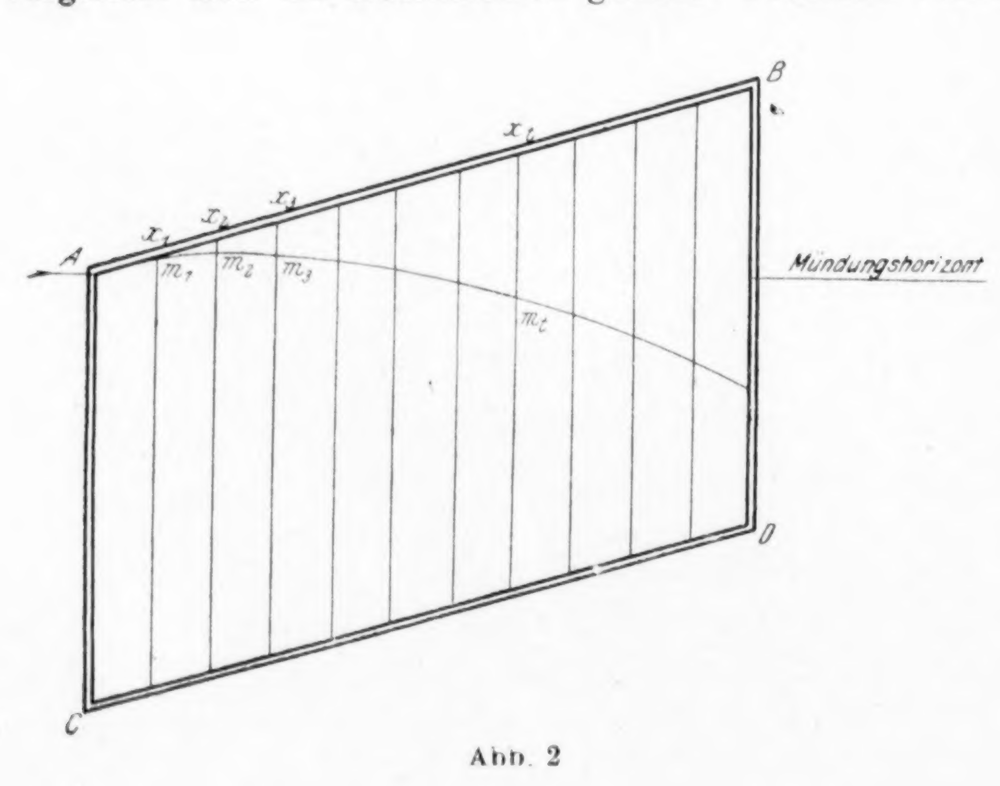


Abb. 2

Zusatz 3. Affinität der Bahnkurven. Wir erkannten, daß unsere Reihenentwicklungen für sehr kleine oder sehr große t sehr gut konvergieren, und daß deshalb schon die ersten Glieder

$$x = a_0(t), \quad y = b_0(t),$$

die den Winkel φ durchaus nicht enthalten, eine ausreichende Näherung liefern.

Man denke sich nun (Abb. 2) einen Rahmen in der

Form eines Parallelogramms $ABCD$, dessen Seiten in den Ecken gegeneinander drehbar sind. Auf AB und CD trage man, von A bezw. D ausgehend, die Strecken

$$x_1 = a_0(1)$$
$$x_2 = a_0(2)$$
$$\vdots$$
$$x_t = a_0(t)$$

ab und verbinde ihre Endpunkte durch Fäden. Auf diesen Fäden markiere man die Punkte $m_1, m_2, \ldots m_t$, deren Entfernungen von den auf AB gelegenen Endpunkten der Fäden die folgenden sind:

$$y_1 = b_0(1)$$
$$y_2 = b_0(2)$$
$$\vdots$$
$$y_t = b_0(t).$$

Nunmehr liegen die Punkte $m_1, m_2, \ldots m_t$ auf einer Näherungskurve, die dem Abgangswinkel $\alpha = BAC - \frac{\pi}{2}$ entspricht. Eine einfache Verschiebung des Rahmens liefert dann sämtliche Bahnkurven, die derselben Anfangsgeschwindigkeit und Werten des Winkels α zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ entsprechen.

Da die Zeit, in welcher das Geschoß einen beliebigen Punkt M erreicht, von der Verschiebung des Rahmens unabhängig ist, kann sie direkt von AB abgelesen werden.

Mit diesem einfachen Apparate habe ich mit praktisch hinreichender Genauigkeit die Bahnen auseinander ableiten können, welche in den »Schaubildern für die 10,5 cm-Gebirgshaubitze L/12« von Krupp für die 6. Ladung angegeben sind, Abb. 3. Die angezogenen Linien sind die von Krupp angegebenen Bahnkurven, die gestrichelten sind die durch Affinität aus der für $\alpha = 16^2/_{16}{}^0$ abgeleiteten. Es beweist dies, daß schon unsere erste Annäherung Bahnkurven liefert, die nur wenig von denen abweichen, mit denen sich der Praktiker begnügt.

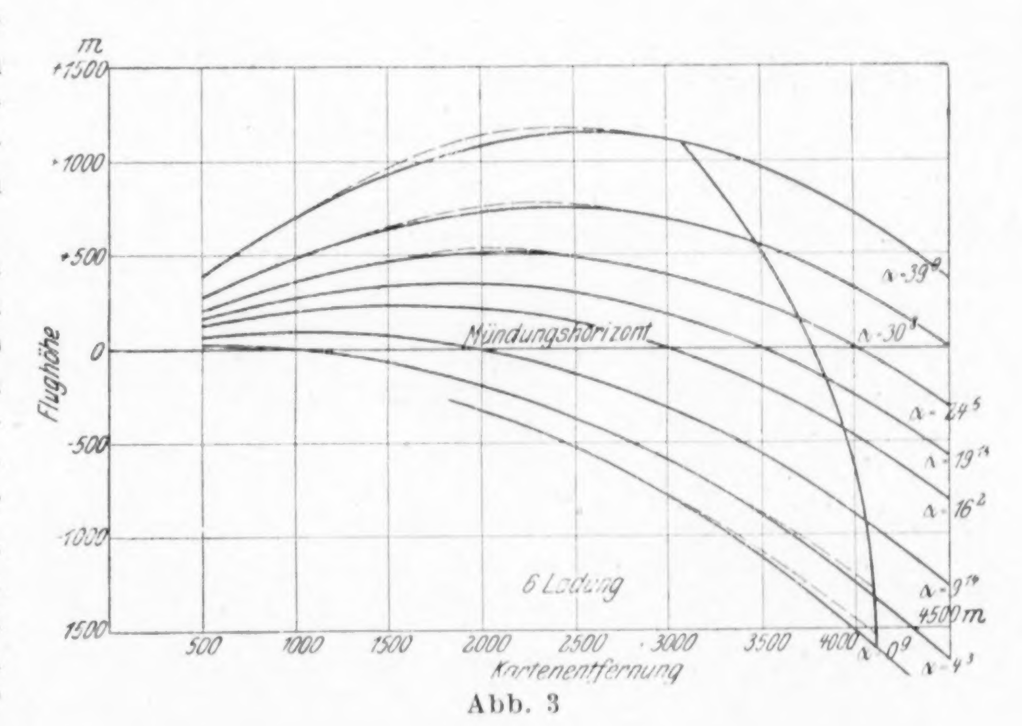


Abb. 3

3. Steile Bahnen. Liegt α in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$, so gibt es eine andere Reihenentwicklung, die mit Ausnahme der Umgebung des Scheitels sehr gut konvergiert. Um für diesen Fall eine Näherungslösung zu erhalten, beginnen wir die Untersuchung noch einmal, setzen aber jetzt

$$v^2 = x'^2 + y'^2 - 2\,x'y' \sin\alpha = (x' - y')^2 + 4\,x'y' \sin^2\frac{\psi}{2},$$

wo $\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ist.

Auf dem aufsteigenden Zweige der Bahn ist

$$x' \sin\alpha > y',$$

also

$$x' - y' > 2\,x' \sin^2\frac{\psi}{2}.$$

Beschränkt man sich nun auf denjenigen Teil des aufsteigenden Astes, für welchen außerdem noch

$$x' - y' > 2\,y'$$

ist, der also den Scheitel der Bahn nicht enthält, so gilt immer die Beziehung

$$1 > \frac{4\,x'y'}{(x'-y')^2}\sin^2\frac{\psi}{2},$$

und man kann die Geschwindigkeit und damit auch $f(v)$ nach geraden Potenzen von $\sin\frac{\psi}{2}$ in eine Reihe entwickeln:

$$f(v) = f(w) + f'(w)\,w\,\frac{2\,x'y'}{(x'-y')^2}\sin^2\frac{\psi}{2} + \ldots,$$

wo diesmal

$$w = x' - y'$$

gesetzt ist.

In diesem Falle lauten die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx'}{dt} &= -x'\left[f(w) + f'(w)\frac{2\,x'y'}{w}\sin^2\frac{\psi}{2} + \ldots\right]\\ \frac{dy'}{dt} &= g - y'\left[f(w) + f'(w)\frac{2\,x'y'}{w}\sin^2\frac{\psi}{2} + \ldots\right]\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{A}').$$

Wir vernachlässigen die Glieder mit $\sin^2\frac{\psi}{2}$ und finden für eine Näherungsbahn die Bewegungsgleichungen

$$\frac{dx'}{dt} = -x' f(w), \quad \frac{dy'}{dt} = g - y' f(w) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{B}')$$

mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = v_0, \quad y' = 0.$$

Subtrahiert man die Gleichungen (B'), so findet man

$$\frac{dw}{dt} = -g - w\,f(w),$$

$$t = -\int_{v_0}^{w}\frac{dw}{g + w\,f(w)}.$$

Wenn man diese Gleichung nach w auflöst, erhält man

$$w = x' - y' = F(v_0, t).$$

Eine abermalige Integration gibt

$$x - y = \int_0^{x-y} d(x-y) = \int_0 F(v_0, t)\,dt.$$

Die Gleichungen (B') liefern uns

$$x' = v_0\,e^{-\int_0^t f(w)\,d}, \quad y' = v_0\,e^{-\int_0 f(w)\,dt} - F(v_0, t),$$

woraus schließlich nach einer letzten Integration x und y als Funktionen von v_0 und t folgen.

Wie man sieht, enthalten die Gleichungen dieser Näherungsbahn den Winkel α nicht. Alle diese Bahnen können also wiederum mit Hilfe des oben beschriebenen Rahmens aus einer einzigen unter ihnen abgeleitet werden.

Will man die wahren Bahnen finden, so hat man die Störungsgleichungen zu bilden und zunächst die Quadrate und Produkte der Größen $\delta x'$, $\delta y'$ und $\sin^2\frac{\psi}{2}$ zu vernachlässigen.

Die Gleichungen sind hier folgende:

$$\frac{d\,\delta x'}{dt} = -x'f'(w)\,\delta w - \delta x' f(w) - x'f'(w)\frac{2\,x'y'}{w}\sin^2\frac{\psi}{2}$$

$$\frac{d\,\delta y'}{dt} = -y'f'(w)\,\delta w - \delta y' f(w) - y'f'(w)\frac{2\,x'y'}{w}\sin^2\frac{\psi}{2}.$$

Es sind dies in bezug auf $\delta x'$ und $\delta y'$ lineare Gleichungen erster Ordnung. Ihre Integrale enthalten $\sin^2 \frac{\psi}{2}$ als Faktor, was ohne weiteres ersichtlich wird, wenn man

$$\delta x' = \xi' \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad \delta y' = \eta' \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad \delta w = (\xi' - \eta') \sin^2 \frac{\psi}{2}$$

setzt. Man erhält dann folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -x'f'(w)(\xi' - \eta') - \xi' f(w) - x'f'(w)\frac{2x'y'}{w} \\ \frac{d\eta'}{dt} &= -y'f'(w)(\xi' - \eta') - \eta' f(w) - y'f'(w)\frac{2x'y'}{w} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (\mathrm{C}').$$

Man subtrahiere nun diese Gleichungen:

$$\frac{d(\xi' - \eta')}{dt} = -[f(w) + w f'(w)](\xi' - \eta') - f'(w)\, 2x'y'$$

und berechne aus der entstandenen, in $(\xi' - \eta')$ linearen Gleichung erster Ordnung $(\xi' - \eta')$. Ist diese Differenz gefunden, so liefern einfache Integrationen die Größen $\xi - \eta$, ξ, η, ξ', η'. Man setze nämlich in (C') $\xi' - \eta' = \zeta(t)$. Dann wird z. B. die erste der Gleichungen übergehen in

$$\frac{d\xi'}{dt} + f(w)\,\xi' + x'f'(w)\,\zeta(t) + x'f'(w)\frac{2x'y'}{w} = 0.$$

Diese Gleichung, die eine lineare Gleichung auf Bezug ξ' ist, läßt sich aber leicht durch Quadraturen auflösen.

Hier gelten in sinngemäßer Anwendung die oben gemachten Zusätze, mit dem einzigen Unterschied, daß die eben aufgestellten Formeln in der Nähe des Scheitels der Bahn ihre Bedeutung verlieren können. Doch ist dann der Winkel, den die Tangente an die Bahnkurve mit der Horizontalen einschließt, klein, und man kann unsere ersten Formeln mit gutem Erfolg anwenden. Ist dagegen α negativ, so gelten die aufgestellten Formeln ohne Einschränkung für die ganze Bahn.

4. Andere Lösung für kleine Abgangswinkel. Die bis jetzt unter Hervorhebung bemerkenswerter Eigenschaften der Bahnkurve eingeführten Methoden reichen aus, um die Integration der Bewegungsgleichungen im Falle des allgemeinen Widerstandsgesetzes auf einfache Quadraturen zurückzuführen, ohne die Gleichung des Hodographen zu benutzen.

Die folgenden Betrachtungen sollen keine vollständige dritte Lösung der gestellten Aufgabe liefern, sondern nur die Eigenschaften der benutzten Näherungsbahnen von anderer Seite beleuchten.

Wir gehen wieder von den ursprünglichen Bewegungsgleichungen aus:

$$\frac{dx'}{dt} = -x'f(v), \quad \frac{dy'}{dt} = g - y'f(v),$$

wo

$$v^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y' \sin \alpha$$

ist und die Anfangsbedingungen die folgenden sind:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = v_0, \quad y' = 0.$$

Es sei wie bisher möglich, $f(v)$ nach ganzen positiven Potenzen von v in eine Reihe zu entwickeln. Damit sind auch Entwicklungen von $f(v)$ nach Potenzen von $\sin \alpha$ gesichert. Es ist nämlich, wie bekannt, auch der Quotient

$$\frac{2x'y'}{x'^2 + y'^2},$$

der übrigens für $t = 0$ und für $t = \infty$ verschwindet[1]), stets absolut kleiner als 1 und um so mehr

$$\left| \frac{2x'x_,}{x'^2 + y'^2} \sin \alpha \right| < 1.$$

[1]) Für t klein wird dieser Quotient klein von der Ordnung $\frac{y'}{x'} \sin \alpha$ und für t sehr groß klein von der Ordnung $\frac{x'}{y'} \sin \alpha$.

Setzt man nun

$$w = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

so geht die Reihe für $f(v)$ über in

$$f(v) = f(w) - \frac{f'(w)\,w}{2}\,\frac{2\,x'y'}{x'^2+y'^2}\sin\alpha + \dots .$$

und mit Hilfe dieser Reihe nehmen die Bewegungsgleichungen die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -x'\left[f(w) - \frac{f'(w)\,w}{2}\,\frac{2\,x'y'}{x'^2+y'^2}\sin\alpha + \dots\right] \\ \frac{dy'}{dt} &= g - y'\left[f(w) - \frac{f'(w)\,w}{2}\,\frac{2\,x'y'}{x'^2+y'^2}\sin\alpha + \dots\right] \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots, \quad (A'').$$

Man vernachlässigt wieder die Glieder, welche $\sin\alpha$ als Faktor enthalten und erhält als erste Näherung

$$\frac{dx'}{dt} = -x' f(w), \quad \frac{dy'}{dt} = g - y' f(w) \quad \dots\dots\dots \quad (B'')$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x' = v_0, \quad y' = 0.$$

Dieselben Gleichungen mit denselben Anfangsbedingungen erhält man, wenn man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Bahn für den Fall einer horizontalen Anfangsgeschwindigkeit aufsucht.

Es sei nun gelungen, die Gleichungen (B'') aufzulösen. Ihre Integrale

$$x = x(v_0, t), \quad y = y(v_0, t)$$

sind selbstverständlich von α unabhängig, denn der Abgangswinkel α tritt weder in den Gleichungen noch in den Anfangsbedingungen auf. Die zugehörigen Bahnkurven lassen sich also wieder durch eine Verschiebung des oben besprochenen Rahmens auseinander ableiten. Die vernachlässigten Glieder verschwinden für $t = 0$ und für $t = \infty$, denn für kleine t ist y' sehr klein und x' sehr groß, während für große t das Umgekehrte gilt. Sie enthalten sämtlich den Faktor $\sin\alpha$. Es erklärt dies auf andere Weise die Möglichkeit, mit Hilfe des Parallelogramms die in den »Schaubildern für die 10,5 cm-Gebirgshaubitze L/12« von Krupp für die 6. Ladung enthaltenen Bahnkurven auseinander abzuleiten.

Will man wieder von den Näherungsbahnen zu den wahren Bahnen übergehen, so hat man die »Störungsgleichungen« für die verschiedenen Glieder aufzustellen.

Die Betrachtung des Ausdrucks mit $\sin\alpha$ als Faktor führt unter Vernachlässigung der zweiten Potenzen und Produkte von $\delta x', \delta y'$ und $\sin\alpha$ und mit Rücksicht auf (B'') zu folgenden Gleichungen:

$$\frac{d\,\delta x'}{dt} = -x'\,\frac{f'(w)}{w}\,(x'\,\delta x' + y'\,\delta x) - \delta x' f(w) + x' f'(w)\,\frac{x'y'}{w}\sin\alpha$$

$$\frac{d\,\delta y'}{dt} = -y'\,\frac{f'(w)}{w}\,(x'\,\delta x' + y'\,\delta x') - \delta y' f(w) + y' f'(w)\,\frac{x'y'}{w}\sin\alpha .$$

Die Koeffizienten dieser Gleichungen sind wieder bekannte Funktionen der Zeit. Auch hier wieder enthalten die Integrale den Faktor $\sin\alpha$, was aus den folgenden Substitutionen evident wird:

$$\delta x' = \xi' \sin\alpha, \quad \delta y' = \eta' \sin\alpha.$$

Dadurch erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi'}{dt} &= -x'\,\frac{f'(w)}{w}\,(x'\xi' + y'\eta') - \xi' f(w) + x'\,\frac{f'(w)}{w}\,x'y' \\ \frac{d\eta'}{dt} &= -y'\,\frac{f'(w)}{w}\,(x'\xi' + y'\eta') - \eta' f(w) + y'\,\frac{f'(w)}{w}\,x'y' \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (C'').$$

Diese Gleichungen lassen sich ähnlich wie die früheren lösen. Die Betrachtung der Glieder höheren Grades in der Reihe für $f(v)$ liefert in gleicher Weise die entsprechenden Glieder der Integrale x, y.

5. Schlufsbemerkung. Wir betrachteten den allgemeinen Fall der Bewegung eines in die Atmosphäre geschleuderten Körpers und gaben zwei Methoden für die Integration seiner Bewegungsgleichungen an, ohne die Gleichung des Hodographen einzuführen. Wir zeigten, daß sich für die Koordinaten bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems Reihen angeben lassen, die nach Potenzen von $\sin^2\frac{\varphi}{2}$, $\sin^2\frac{\psi}{2}$ oder $\sin\alpha$ fort-

schreiten, und sagten, daß diese Reihen für sehr kleine t, wie sie in der Praxis benutzt werden, und für sehr große t gut konvergieren. Daraus folgte weiter, wenn man sich auf das Anfangsglied der Reihe beschränkte, daß die Bahnkurven sich mit Annäherung in der Form $x = x(v_0, t)$, $y = y(v_0, t)$ darstellen lassen und also auseinander durch einfache Verschiebung eines Gelenk Parallelogramms abgeleitet werden können (Affinität der Bahnkurven).

Danach drängt sich die Frage auf: Gibt es vielleicht Zentralkräfte und Widerstandsgesetze von der Art, daß die zugehörigen Bahnkurven mit vollkommener Strenge auseinander auf diese Art abgeleitet werden können?

Bekanntlich sind die Bahnkurven eines unter Einfluß der Schwere im leeren Raum fallenden Körpers von dieser Art. Wir fragen zunächst: Gibt es auch allgemeinere Zentralkräfte der Art, daß die zugehörigen Bahnkurven die obige Eigenschaft besitzen?

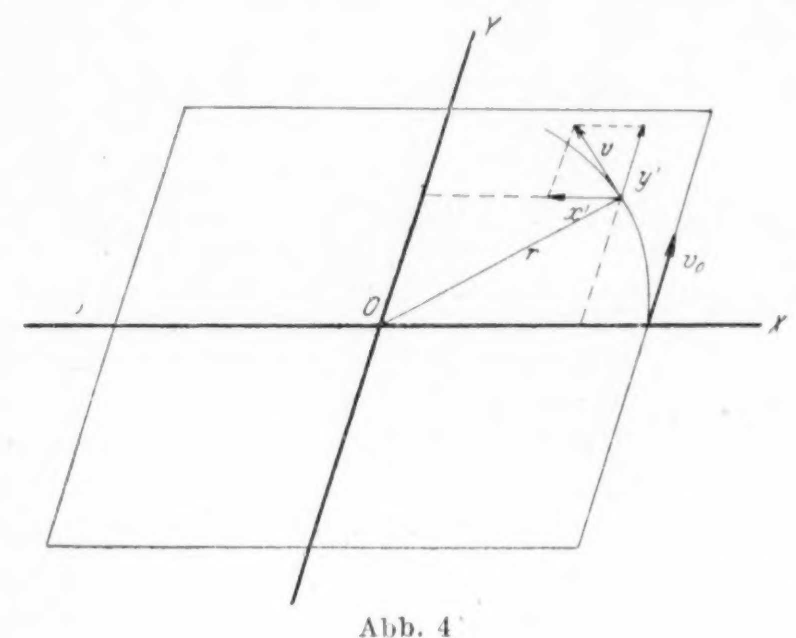


Abb. 4

Um diese Frage zu beantworten, wählen wir das Attraktionszentrum zum Nullpunkt eines Koordinatensystems. Der Radius nach der Anfangslage des Körpers sei die x-Achse, die y-Achse werde parallel zur Richtung der Anfangsgeschwindigkeit gewählt. $F(r, t)$ sei die Anziehungskraft, die als von der Zeit und von der Entfernung r vom Attraktionszentrum abhängig vorausgesetzt werde. Die Bewegungsgleichungen sind dann (Abb. 4), da hier die Seiten des Kräftedreieckes sich wie $r : x : y$ verhalten:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - x \frac{F(r, t)}{r}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = - y \frac{F(r, t)}{r}$$

und die Anfangsbedingungen:

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = 0, \quad x' = 0, \quad y' = v_0.$$

Sollen die Integrale vom Winkel der Koordinatenachsen unabhängig sein, so muß die Ableitung von $\frac{F(r, t)}{r}$ nach α verschwinden, also

$$\left[r \frac{\partial F(r, t)}{\partial r} - F(r, t)\right] \frac{d r}{d \alpha} = 0.$$

Daraus folgt

$$F(r, t) = r f(t),$$

wo $f(t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit ist. Es ist dies eine wohlbekannte Tatsache. Ist z. B. $f(t)$ eine positive Konstante, so erhält man die Bahnen der Planeten im Innern der Nebelmasse, wie sie der Hypothese von Fay entsprechen. Die Bewegung an der Erdoberfläche erhält man, wenn man überdies r als sehr groß betrachtet.

Man kann diesen Gedankengang aber noch weiter verfolgen. Man nehme an, die Bewegung werde durch Kräfte gestört, die nur von der Geschwindigkeit abhängen, die also als Widerstandskräfte betrachtet werden können. Welcher Art müssen diese Kräfte sein, wenn die oben erwähnte Eigenschaft erhalten bleiben soll? Der Ausdruck $\Phi(v)$ gebe die Größe dieser Kraft pro Masseneinheit an. Bei derselben Wahl des Achsensystems, die schon eben benutzt wurde, erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - x f(t) - \frac{d x}{d t} \frac{\Phi(v)}{v}, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = - y f(t) - \frac{d y}{d t} \frac{\Phi(v)}{v}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$t = 0, \quad x = x_0, \quad y = 0, \quad x' = 0, \quad y' = v_0.$$

Sollen die Integrale von α unabhängig sein, so muß die Ableitung von $\frac{\Phi(v)}{v}$ nach α verschwinden, also muß

$$\Phi(v) = c v$$

sein. Auch diese Tatsache ist bekannt und wir können mithin zusammenfassen:

Die Affinität der Bahnkurven gilt exakt bei konstanter Gravitation und bei Anziehung proportional der ersten Potenz der Entfernung, wofern der Widerstand linear mit der Geschwindigkeit wächst. Das oben angeführte Beispiel der 10,5 cm-Haubitze zeigte, daß diese Eigenschaft auch praktisch erhalten bleibt unter Verhältnissen, für die die Annahme eines linearen Widerstandsgesetzes keinerlei brauchbare Näherung für den Bewegungsverlauf liefern würde. Die vorstehende Untersuchung läßt den Grund hierfür erkennen: Die Affinität beruht auf der Möglichkeit der hier gegebenen Entwicklungen (A), (A') bezw. (A'') und auf deren guter Konvergenz. 6

Beiträge zur Prandtlschen Tragflügeltheorie.

Von **R. FUCHS** in Berlin-Halensee.

Durch die neue Tragflügeltheorie, wie sie Prandtl und seine Mitarbeiter[1]) begründet haben, sind mit großem Erfolg die grundlegenden Fragen über die Luftkräfte in Angriff genommen und auch der numerischen Rechnung zugänglich gemacht worden. Im folgenden werden einige mathematische Vereinfachungen[2]) beigetragen, die auch geeignet erscheinen, die numerischen Berechnungen einfacher zu gestalten. Insbesondere wird für den sogenannten induzierten Widerstand ein Ausdruck entwickelt, der es gestattet, den Unterschied dieses Widerstandes bei beliebiger Auftriebsverteilung gegenüber seinem kleinsten Wert bei elliptischer Verteilung zu beurteilen.

1. Das ebene Problem. Die Tragflügeltheorie von Kutta-Joukowski behandelt das sogenannte zweidimensionale Problem. Sie nimmt einen zylindrischen Flügel an, der sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt, oder praktisch gesprochen, eine Stelle des Flügels, die sehr weit von den Enden entfernt ist. Legt man die z-Achse eines Koordinatensystems in die Richtung der Erzeugenden des Zylinders und denkt sich die Strömung der Luft zur z-Achse senkrecht, so hat man in der Richtung der z-Achse weder eine Geschwindigkeitskomponente, noch ein Druckgefälle und erhält ein Abbild des Strömungsvorganges für ein beliebiges z, wenn man die Strömung in der x-y Ebene betrachtet. Um diese Strömung mathematisch zu erfassen, bedient man sich mit Vorteil der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Bedeutet $z = x + y\,i$, wobei ja jetzt eine Verwechslung mit der dritten Raumkoordinate ausgeschlossen ist, und $f(z)$ eine Funktion von z, so stellt $f(z)$ eine mögliche Flüssigkeitsströmung dar; ist nämlich $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, so gibt $\psi(x,y) =$ konst. eine Stromlinienschar und $\varphi(x,y) =$ konst. die zugehörige Schar von Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials. Um die Strömung, die zu einem gegebenen Querschnitt unseres Zylinders, zu einem gegebenen »Flügelprofil« gehört, zu erhalten, hat man die Funktion $f(z)$ so einzurichten, daß das gegebene Profil in einer Stromlinie liegt. Zu dieser Frage, die heute ihrer Lösung schon recht nahe gebracht worden ist, liegt eine umfangreiche Literatur vor[3]). Bei der so erhaltenen Potentialströmung sind die Komponenten der Geschwindigkeit im Punkte (x, y): $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Man nennt auch $w = f(z)$ das komplexe Potential und $\frac{dw}{dz} = v_x - i\,v_y$ den komplexen Wert der Geschwindigkeit.

Soll die das Profil umfließende Strömung einen Auftrieb ergeben, so kann $f(z)$ keine eindeutige Funktion sein, weil die sogenannte Zirkulation $\Gamma = \int_C v_s\,ds$, wo C eine das Profil umschlingende geschlossene Kurve bedeutet, von Null verschieden sein muß. Nach Joukowski bestimmt sich der Wert der Zirkulation, der an sich noch

[1]) Prandtl, Tragflügeltheorie I. und II. Mitteilung, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1918 und 1919; Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energteverlust, ebenda 1919; Betz, Beiträge zur Tragflügeltheorie, Dissertation, Göttingen 1919; Berichte und Abh. der wiss. Ges. für Luftfahrt 1920; Munk, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Dissertation, Göttingen 1916.

[2]) Es sei dabei auf eine Arbeit von A. Trefftz hingewiesen (Mathem Annalen, Bd. 82, 1921, S. 306—319), die ähnliche Zwecke in anderer Weise verfolgt.

[3]) Die Lösung dieser Frage und die hierhergehörige Literatur findet man in den Aufsätzen von v. Mises, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1917, S. 157; 1920, S. 68, 87.

beliebig ist, dadurch, daß an der stets scharfen Hinterkante des Profils die Geschwindigkeit nicht unendlich groß werden darf, sondern daß daselbst glatter Abfluß der Strömung erfolgen muß. Der Auftrieb für die Längeneinheit der Breite des Flügels ergibt sich dann in der Form $A = \varrho \Gamma v$, wenn ϱ die Luftdichte und v die Geschwindigkeit der Luft gegen den Flügel in großer Entfernung von der Tragfläche bedeutet. Für die ebene Tragfläche, d. h. für einen schmalen, symmetrisch gebildeten, vorn abgerundeten, hinten spitz zulaufenden Spalt als Profil findet man für $\Gamma = \pi t v \sin \alpha$, wenn t die Flügeltiefe, also die Länge des Spaltes, und α der Anstellwinkel, d. h. der Winkel, unter dem die Strömung gegen den Spalt gerichtet ist, bedeutet. Andere Profile lassen sich mit derselben Formel behandeln, wenn man t durch einen geeigneten, der Tiefe proportionalen und praktisch von ihr nicht sehr verschiedenen Wert ersetzt und α von dem Werte zu zählen anfängt, bei dem der Auftrieb den Wert Null hat. Die Nichteindeutigkeit des Potentials kann physikalisch so gedeutet werden, daß man sich durch das Innere des Tragflügelzylinders einen Wirbelfaden gelegt denkt, wobei ja der Außenraum, also der Flüssigkeitsraum, noch immer wirbelfrei, die Strömung also noch immer eine Potentialströmung bleibt.

Da die von der Flüssigkeit auf den Flügel ausgeübte Kraft bei der zweidimensionalen Strömung auf der Richtung von v senkrecht steht, so bekommt man dabei zwar schon eine recht befriedigende Auftriebstheorie, aber noch keine Möglichkeit einer Erklärung des Widerstandes. Eine solche wird erst möglich, wenn wir uns der neuen Prandtlschen Theorie des endlichen Tragflügels zuwenden.

2. Die Wirbelverteilung beim räumlichen Problem. Im Hinblick auf das Folgende ist es zweckmäßig, jetzt das Koordinatensystem anders zu wählen. Der Anfangspunkt liege in der Mitte des Flügels von endlicher Breite, die x Achse in Richtung der Flügelbreite, die z-Achse in Richtung der Strömung (positiv in Richtung nach hinten), die y-Achse zu beiden senkrecht (positiv in Richtung nach oben). Der Tragflügel erstrecke sich über $x = -\frac{b}{2}$ bis $x = +\frac{b}{2}$. Wenn wir auch jetzt noch die Vorstellung des den Flügel durchsetzenden Wirbelfadens festhalten, so dürfen wir nicht annehmen, daß dieser Faden, den wir mit Prandtl den gebundenen Wirbelfaden nennen wollen, an den Flügelenden aufhört, da ja nach den Helmholtzschen Sätzen der klassischen Hydrodynamik ein Wirbelfaden entweder geschlossen sein oder aber sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken muß. Wir kommen so zu der Vorstellung, daß sich der gebundene Wirbel in den Flüssigkeitsraum hinein als freier Wirbel fortsetzt. Wir machen mit Prandtl die vereinfachende Annahme, daß die von dem Wirbel hervorgerufene Geschwindigkeit gegenüber der der Hauptströmung v unendlich klein ist. Dann wird ein freier Wirbel, nachdem er den Flügel verlassen hat, sogleich vom Flüssigkeitsstrom ergriffen und senkrecht zum Flügel nach hinten, im wesentlichen in der Richtung von v, fortgetragen. Die einfachste Vorstellung wäre jetzt die, daß der gebundene Wirbel ein einfacher Wirbelfaden ist, dessen Zirkulation über die ganze Tragflügelbreite konstant bleibt, und daß sich von den beiden Flügelenden ein freies geradliniges Wirbelpaar von gleich großer und entgegengesetzter Zirkulationsstärke in die Flüssigkeit hinein erstreckt. Diese Vorstellung eines Hufeisenwirbels reicht in der Tat für manche Zwecke aus[1]); will man aber zu einer brauchbaren Theorie für den Flügel selbst gelangen, so muß man annehmen, daß der gebundene Wirbel aus einem Bündel paralleler, geradliniger Wirbelfäden besteht, von denen jeder an zwei symmetrischen Stellen des Flügels endet und von dort aus ein freies Wirbelpaar in die Flüssigkeit sendet, so daß nun von allen Punkten der Tragflügelhinterkante freie Wirbel in die Flüssigkeit hinausgehen. Wir haben dann die Vorstellung eines vom Tragflügel nach hinten gehenden Wirbelbandes, das aus lauter parallelen, in der Richtung der z-Achse verlaufenden Fäden besteht. Die Zirkulation des gebundenen Wirbelsystems wird nun eine stetige Funktion von x, die, wie sich zeigt, für $x = \pm \frac{b}{2}$ verschwinden muß. Aendert sich $\Gamma(x)$ längs dx um $\frac{d\Gamma}{dx} dx$, so muß die Zirkulation aller von dx ausgehenden freien Wirbel $-\frac{d\Gamma}{dx} dx$ sein, da sich das Kurvenintegral Γ beim Verschieben der den Flügel umschlingenden Kurve C sich nur so ändern kann, daß Wirbelfäden

[1]) Vergl. Betz, Die gegenseitige Beeinflussung zweier Tragflächen, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1914, S. 253.

geschnitten werden, deren Gesamtzirkulation der Veränderung von Γ entgegengesetzt gleich ist. Bei dem hier gegebenen Bilde mit dem gebundenen Wirbelsystem und dem von ihm ausgehenden Wirbelbande wird die Tragfläche als ein Gebilde angesehen, dessen Querabmessungen im Vergleich zur Breite nur klein sind. Ein solches Gebilde wollen wir mit Prandtl einen tragenden Faden nennen.

3. Ansatz für die Geschwindigkeit. Der tragende Faden und das freie Wirbelband geben in der Flüssigkeit ein Geschwindigkeitsfeld, das, analog dem Biot-Savartschen Gesetze über das Magnetfeld in der Umgebung eines stromdurchflossenen Leiters, gefunden wird. Es zeigt sich, daß am Flügel selbst das Feld des gebundenen Wirbels gleich Null ist, daß aber das Band der freien Wirbel daselbst einen Vektor hervorruft, der die Richtung der negativen y-Achse hat und an der Stelle x[1]) die Größe

$$v_1(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{-b/2}^{+b/2} \frac{d\Gamma_\xi}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Das Wirbelband besteht aus geradlinigen Wirbeln, die sich von $z=0$ bis $z=\infty$ erstrecken; für das Folgende ist es aber zweckmäßig[2]), sich das Wirbelband auch nach der negativen Seite der z-Achse von $z=0$ bis $z=-\infty$ hin fortgesetzt zu denken. Die Wirkung dieses doppelt unendlichen Bandes ist dann, wie sich aus Symmetriegründen ergibt, am Orte des Flügels genau doppelt so groß wie die des einfachen und an jeder Stelle des Bandes die gleiche.

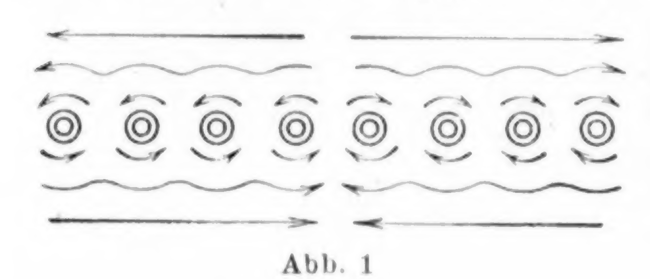


Abb. 1

Das Wirbelband selbst kann, wie es Abb. 1 schematisch darstellt, durch eine Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit ersetzt werden. Da die Zirkulation für die Breite dx der Fläche den Wert $-\frac{d\Gamma}{dx}dx$ hatte, so muß also die Geschwindigkeit unterhalb der x-Achse den Wert $-{}^1/_2\frac{d\Gamma}{dx}$, über ihr aber den Wert $+{}^1/_2\frac{d\Gamma}{dx}$ haben. Eine Strömung, die gerade diese Unstetigkeitsfläche besitzt, ist die, deren komplexer Geschwindigkeitswert ${}^1/_2\frac{d\Gamma(z)}{dz}$ ist, wobei wieder $z=x+yi$ gesetzt ist. Der Vorgang ist ja jetzt wieder an jeder Stelle der räumlichen z-Achse der gleiche, braucht also nur in der $(x\,y)$-Ebene betrachtet zu werden, so daß bei dieser Bezeichnung eine Verwechslung mit der z-Koordinate ausgeschlossen ist. $\Gamma(z)$ ist eine zweiwertige Funktion von z, die beim Ueberschreiten der Strecke $y=0$, $-\frac{b}{2}<x<+\frac{b}{2}$, das Vorzeichen wechselt.

Das Geschwindigkeitsfeld, welches das Wirbelband um sich verbreitet, ist das einer Strömung, die für $y=0$, $-\frac{b}{2}<x<+\frac{b}{2}$, den Geschwindigkeitswert $2\,v_1(x)$, Gl. (1), in Richtung der negativen Achse hat. Der komplexe Wert der Geschwindigkeit dieser Strömung ist

$$v_1(z) = \frac{1}{8\pi}\int_C \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$

wenn C eine die Strecke $-\frac{b}{2}<x<+\frac{b}{2}$, $y=0$, umschlingende Kurve bedeutet. Die Gesamtströmung also, die das Wirbelband ersetzt und von dem Wirbelband hervorgerufen wird, hat danach den komplexen Wert:

$$v_2(z) = {}^1/_2\,\frac{d\Gamma(z)}{dz} - 2\,i\,v_1(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Genau genommen wäre der Nr. 1 entsprechend das Spiegelbild dieses Vektors über der x-Achse als komplexer Wert der Geschwindigkeit zu nehmen. Während $\Gamma(z)$ eine zweiwertige Funktion von z ist, muß $v_1(z)$ zu beiden Seiten des Verzweigungsschnittes denselben Wert besitzen: es liegt in der Natur der Sache, wenn wir $v_1(z)$ als eine in der

[1]) Prandtl, Tragflügeltheorie, a. a. O. S. 19.

[2]) Mit Munk, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Dissertation, Göttingen 1919, Nr. 6.

ganzen Ebene eindeutige und stetige Funktion von z ansehen. Für $\Gamma(z)$ machen wir den Ansatz

$$\Gamma(z) = \sqrt{1-\left(\frac{2z}{b}\right)^2}\, a(z) \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (4),$$

wo nunmehr auch $a(z)$ als in der ganzen Ebene eindeutig und stetig angesehen wird. Praktisch wird man ja $a(z)$, für jede beliebige stetige Zirkulationsverteilung, beliebig genau sogar durch eine ganze rationale Funktion annähern können.

Nach dem II. Cauchyschen Satz der Funktionentheorie gilt für die eindeutige Funktion $v_1(z)$ die Gleichung

$$v_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{v_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (5),$$

also nach (3):

$$v_1(z) = \frac{1}{8\pi}\int\limits_C \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{z-\zeta} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_C \frac{v_2(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \ldots \ldots (6).$$

Der Vergleich mit (2) zeigt, daß das zweite Integral verschwinden muß. Man kann die Kurve C dieses zweiten Integrals durch einen unendlich großen Kreis K mit $z=0$ als Mittelpunkt ersetzen, da zwischen C und K $v_2(z)$ eindeutig und stetig ist, und erkennt daraus, daß $v_2(z)$ im Unendlichen verschwinden muß und zwar offenbar mindestens von zweiter Ordnung, da ja $\frac{d\Gamma(z)}{dz}$, $v_1(z)$ und also auch $v_2(z)$ gerade Funktionen von $\frac{2z}{b}$ sind. Es stellt also $v_2(z)$ eine Strömung dar, bei der die Flüssigkeit im Unendlichen ruht.

4. Zusammenhang von Zirkulations- und Geschwindigkeits-Verteilung.

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, in einfacher Weise $v_1(z)$ zu berechnen, wenn $\Gamma(z)$ gegeben ist, und umgekehrt. Wenn $v_2(z)$ im Unendlichen mindestens von zweiter Ordnung verschwindet, muß das komplexe Potential dieser Strömung

$$w(z) = \int v_2(z)\, dz = {}^1/_2\, \Gamma(z) - 2i\int v_1(z)\, dz \qquad \ldots \ldots (7)$$

daselbst mindestens von erster Ordnung verschwinden, wenn die Integrationskonstante geeignet gewählt wird. Machen wir den Ansatz:

$$\Gamma(z) = \sqrt{1-\left(\frac{2z}{b}\right)^2}\left(a_0 + a_2\left(\frac{2z}{b}\right)^2 + \ldots\right),\quad v_1(z) = c_0 + c_2\left(\frac{2z}{b}\right)^2 + \ldots \qquad \ldots (8),$$

wobei man, wie schon gesagt, in der Praxis an Stelle der unendlichen Reihen immer ganze Funktionen setzen kann, so erkennt man, wenn man nach Potenzen von $\frac{2z}{b}$ entwickelt, aus dem Verschwinden aller Glieder mit negativem Exponenten in (7), wenn man noch

$$(1-t^2)^{-1/2} = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{2i}\, t^{2i},\quad (1-t^2)^{+1/2} = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{2i}\, t^{2i} \qquad \ldots \ldots (9)$$

einführt:

$$2b\, c_{2\lambda} = (2\lambda+1)\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_{2i}\, a_{2i+2\lambda};\quad a_{2\lambda} = 2b\sum_{i=0}^{\infty} \delta_{2i}\,\frac{b_{2i+2\lambda}}{2i+2\lambda+1} \qquad \ldots (10).$$

Man kann aber auch $\frac{d\Gamma(z)}{dz}$, wenn $v_1(z)$ gegeben ist, durch ein Integral, das die Umkehrung von (2) darstellt, berechnen. Für die eindeutige und stetige Funktion $\frac{d\Gamma(z)}{dz}\sqrt{1-\left(\frac{2z}{b}\right)^2}$ erhält man nämlich wiederum nach dem Cauchyschen Satz:

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz}\sqrt{1-\left(\frac{2z}{b}\right)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta}\sqrt{1-\left(\frac{2\zeta}{b}\right)^2}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z};$$

ersetzt man wieder zuerst C durch den unendlich großen Kreis K, läßt auf ihm $4i\, v_1(\zeta)$ an die Stelle von $\frac{d\Gamma(\zeta)}{d\zeta}$ treten und kehrt dann wieder zur Kurve C zurück, so erhält man:

$$\frac{d\Gamma(z)}{dz}\sqrt{1-\left(\frac{2z}{b}\right)^2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_C v_1(\zeta)\sqrt{1-\left(\frac{2\zeta}{b}\right)^2}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} \qquad \ldots \ldots (11),$$

oder auch:

$$\frac{d\,\Gamma(x)}{d\,x}\sqrt{1-\left(\frac{2\,x}{b}\right)^2}=\frac{4}{\pi}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} v_1(\xi)\sqrt{1-\left(\frac{2\,x}{b}\right)^2}\,\frac{d\xi}{\xi-z}\,.$$

Diese Formel hat zuerst Betz[1]) mit Hilfe eines Abbildungsverfahrens hergeleitet. Ein besonders einfaches Beispiel unseres Strömungsvorganges erhält man mit $a(z)=a_0$ gleich einer Konstanten. Diesem Fall entspricht also eine elliptische Verteilung der Zirkulation über die Tragflügelbreite, wobei $a_0=\Gamma_m$ die Zirkulation in der Mitte bedeutet. Aus (10) ergibt sich $v_1(z)$ ebenfalls als Konstante gleich $\frac{\Gamma_m}{2\,b}$. Der komplexe Wert der Geschwindigkeit und das komplexe Potential:

$$v_2(z)=\frac{\Gamma_m\,i}{b}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-\left(\frac{b}{z}\right)^2}}-1\right),\quad w(z)=\frac{\Gamma_m i}{b}\left[\sqrt{z^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2}-z\right]\quad . \quad . \quad (12)$$

geben hier das Strömungsbild einer Platte von der Breite b, die senkrecht zu ihrer Fläche mit der Geschwindigkeit $\frac{\Gamma_m}{b}$ durch die Flüssigkeit fortbewegt wird.

5. Der induzierte Widerstand. Die Theorie der Tragfläche von endlicher Breite liefert neben dem Auftrieb auch einen Widerstand. Nach der allgemeinen neuen Prandtlschen Theorie[2]) steht die Luftkraft auch jetzt noch auf der Ebene senkrecht, die von einem Tragflügelelement und der Richtung, in der der abgelenkte Luftstrom das Element trifft, gebildet wird. Zerlegt man diese Kraft in die Komponenten senkrecht zur Richtung der Hauptströmung v (Auftrieb) und in Richtung dieser Strömung (Widerstand), so ergibt sich, wenn wieder v_1 klein gegen v angenommen wird, für den Auftrieb:

$$d\,A=\varrho\,v\,\Gamma(x)\,d\,x,\quad A=\varrho\,v\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\Gamma(x)\,d\,x\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und den Widerstand[3])

$$d\,W=\varrho\,v\,\Gamma(x)\,\frac{v_1(x)}{v}\,d\,x,\quad W=\varrho\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\Gamma(x)\,v_1(x)\,d\,x.\quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Dieser Widerstand, der nur ein Teil des Gesamtwiderstandes[4]) ist, wird von Prandtl und seinen Mitarbeitern **induzierter Widerstand** genannt

Bewegt sich der Flügel um die Strecke l vorwärts, so wird dabei gegen den induzierten Widerstand die Arbeit Wl geleistet. Diese Arbeit muß mit der kinetischen Energie übereinstimmen, die in diesem Bereich zwischen zwei Ebenen senkrecht zur Richtung v am Amfang und am Ende des Weges l infolge der Strömung um das Wirbelband in der Flüssigkeit zurückbleibt[5]). Ist φ das reelle Potential dieser Strömung, so ist die kinetische Energie nach den Ergebnissen der Hydrodynamik[6]):

$$T=\frac{\varrho\,l}{2}\int\limits_C\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\,n}\,d\,s\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15),$$

wo C wieder eine den Flügel bezw. das Wirbelband unendlich nahe umschlingende Kurve, ds ein Element dieser Kurve und n die nach dem Innern des Flügels gerichtete Normale bedeutet. Am Flügel selbst ist aber nach (3) $\varphi={}^1\!/_2\,\Gamma(x)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\,n}=2\,v_1$, also:

---

[1]) Betz, Dissertation, S. 8.

[2]) Tragflügeltheorie, I. Mitteilung, S. 11, Gl. (5).

[3]) Ebenda S. 19, Gl. (16).

[4]) Der noch übrige Teil, der nur von der Profilform, nicht aber von der geometrischen Form (Seitenverhältnis) des Flügels abhängt, wird Profilwiderstand genannt.

[5]) Vergl. Betz, Einführung in die Theorie der Flugzeug-Tragflügel (Die Naturwissenschaften, Heft 38 und 39); Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust (Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen, math.-physik. Kl. 1919).

[6]) Siehe z. B. Lamb, Hydrodynamik, Leipzig 1907, S. 56; vergl. auch A. Trefftz, a. a. O. S. 317.

$$T = \varrho l \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma(x)\, v_1(x)\, dx = Wl.$$

Wir wollen nun zwei Strömungen betrachten, die zu zwei verschiedenen Zirkulationsverteilungen gehören, und bezeichnen sie durch die Indices (1) und (2); so erhält man infolge des Greenschen Satzes:

$$\int_C \varphi^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n}\, ds = \int_C \varphi^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n}\, ds$$

oder also:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(1)}(x)\, v_1^{(2)}(x)\, dx = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(2)}(x)\, v_1^{(1)}\, dx \quad \ldots\ldots\ldots (16).$$

Betrachten wir nun diejenige Strömung, die zu der Verteilung $\Gamma_d = \Gamma^{(1)}(x) - \Gamma^{(2)}(x)$ gehört, so wird ihr induzierter Widerstand nach (16):

$$W_d = \varrho \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (\Gamma^{(1)} - \Gamma^{(2)})\,(v_1^{(1)} - v_1^{(2)})\, dx = W^{(1)} + W^{(2)} - 2\varrho \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(2)} v_1^{(1)}\, dx.$$

Wählen wir nun als Strömung (1) diejenige, die der elliptischen Verteilung entspricht und von der am Ende von 4. die Rede war, so wird v_1 konstant gleich $\frac{\Gamma_m}{2b}$, und wir erhalten, wenn der Auftrieb beider Strömungen derselbe

$$\varrho v \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(1)}\, dx = \varrho v \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(2)}\, dx = A$$

ist,

$$W^{(1)} = \frac{v_1^{(1)}}{v} A, \quad 2\varrho \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma^{(2)} v^{(1)}\, dx = \frac{2 v_1^{(1)}}{v} A = 2 W^{(1)},$$

und somit

$$W^{(2)} = W^{(1)} + W_d.$$

Da eine kinetische Energie aber immer wesentlich positiv ist, so folgt hieraus, daß **von allen Tragflächen bei gleichem Auftrieb und gleicher Fluggeschwindigkeit diejenige den kleinsten Widerstand hat, bei der die Zirkulationsverteilung eine elliptische ist.** Dieses Resultat, das die fundamentale Bedeutung der elliptischen Verteilung für die Tragflügeltheorie erkennen läßt, ist zuerst von Munk[1]) ausgesprochen worden. Aus der hier gegebenen Herleitung folgt zugleich die Größe dieses Unterschiedes.

6. Erstes Beispiel. Es mögen hier noch einige Beispiele angegeben werden. Zuerst der Fall, bei welchem $a(x)$ und also auch $v_1(x)$ eine quadratische Funktion von x ist. Wir setzen also entsprechend (8) und (10):

$$\Gamma^{(2)} = \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2}\left[\Gamma_m^{(2)} + a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right], \quad v_1^{(2)} = \frac{1}{2b}\left[\Gamma_m^{(2)} - {}^1\!/_2\, a + 3a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right]$$

und vergleichen diesen Ansatz mit der elliptischen Verteilung

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma_m^{(1)} \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^2}, \quad v_1^{(1)} = \frac{\Gamma_m^{(1)}}{2b}.$$

[1]) Dissertation, Nr. 1; vergl. auch Prandtl, I. Mitteilung Nr. 15, und Trefftz, a. a. O. § 5.

Winkels von seinem Werte in der Mitte wird sich ein Fehler $\frac{\alpha-\alpha^{(m)}}{\alpha_1^{(m)}} = \varepsilon(x)$ ergeben, den den man leicht durch eine Parabel approximieren kann. Wir ersetzen nun

$$\Gamma(x) \text{ durch } \Gamma(x)\left[1+\frac{\varepsilon(x)}{1+\frac{\pi}{2}\frac{t}{b}c_0}\right];$$

den verbesserten Wert für $\frac{\alpha}{\alpha_1^{(m)}}$ kann man dann leicht ausrechnen und findet, daß dieser Wert schon bei der ersten Näherung bis $x = 0{,}95\,\frac{b}{2}$ hin praktisch konstant bleibt. Die Γ-Werte aber, die man bei dieser Korrektur zu den ersten drei Näherungen bekommt, unterscheiden sich so gut wie gar nicht mehr. Zur Erlangung der Γ-Werte reicht man also praktisch mit der ersten Näherung und dem angegebenen Korrekturverfahren vollständig aus. Für viele Fragen aber wird, bei der Kleinheit der Unterschiede, die erste Näherung auch schon ohne Korrektur genügen.

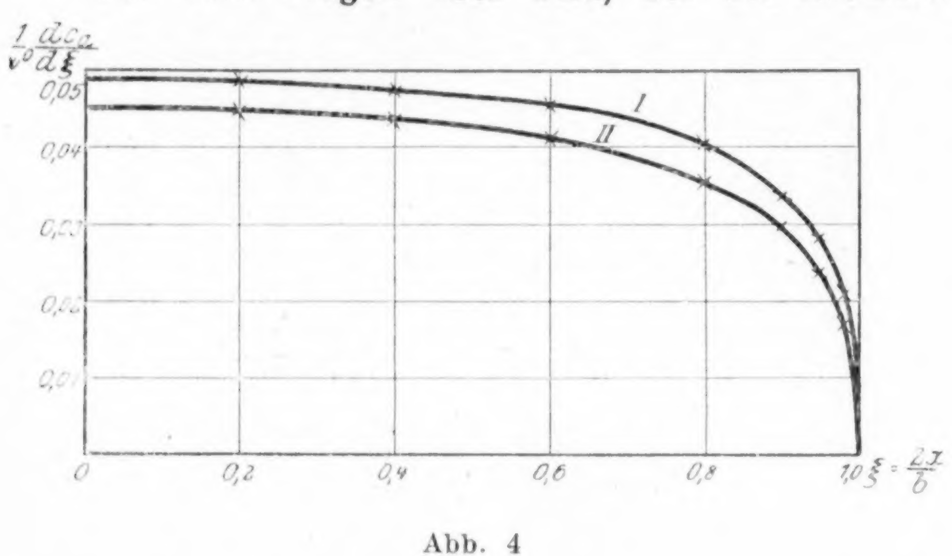


Abb. 4

Verteilung des Auftriebsbeiwertes beim rechteckigen Flügel über die Spannweite. Seitenverhältnis $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ bei I, ${}^1/_6$ bei II.

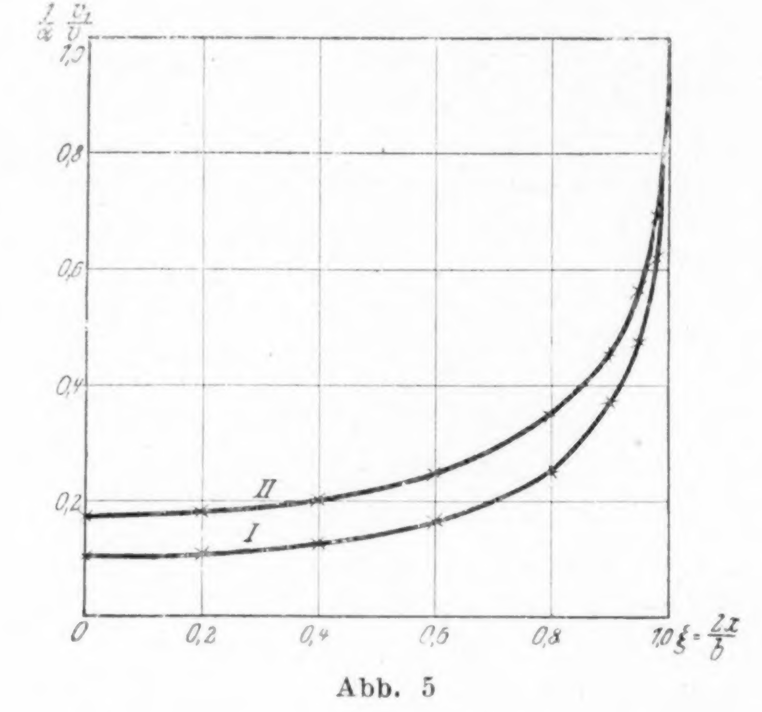


Abb. 5

Verringerung des Anstellwinkels durch das Wirbelband beim rechteckigem Flügel. Seitenverhältnis $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ bei I, ${}^1/_6$ bei II.

Es ist $\Gamma_m = t\,\pi\,v\,\alpha_1^{(m)} = \frac{2\,b\,v\,\alpha}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t}+c_0}$. Für c_0 findet man mit der Korrektur bei ${}^1/_{10}$ den Wert 0,779, bei ${}^1/_6$ den Wert 0,824. Weiter wird

$$dA = \varrho\,v\,\Gamma\,dx = \frac{2\,\varrho\,v^2\,b\,\alpha}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t}+c_0}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_m}\,dx.$$

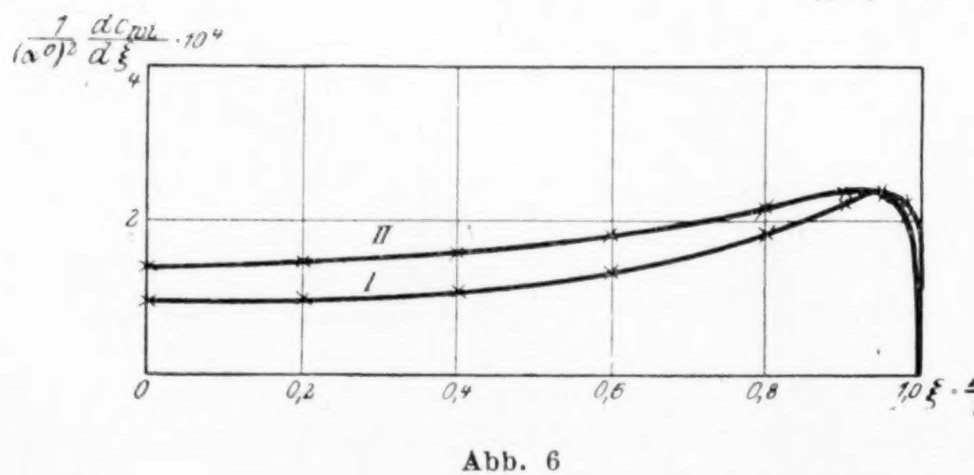


Abb. 6

Verteilung des Beiwertes des induzierten Widerstandes beim rechteckigen Flügel über die Spannweite. Seitenverhältnis $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ bei I, ${}^1/_6$ bei II.

Setzt man also in der jetzt üblichen Weise $A = {}^1/_2\,c_a\,\varrho\,v^2\,b\,t$, so erhält man, wenn man sich noch durch Einführung von $\xi = \frac{2x}{b}$ von dem zufälligen Werte von b freimacht:

$$\frac{1}{\alpha^0}\frac{d\,c_a}{d\,\xi} = \frac{2\,\pi}{180^0}\,\frac{b}{t}\,\frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t}+c_0}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_m}.$$

In Abb. 4 ist diese Verteilung des Auftriebsbeiwertes wieder für $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ und $\frac{t}{b} = {}^1/_6$

angegeben. Durch Integration erhält man daraus für $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$, $c_a = 0{,}088\,\frac{\alpha^0}{1^0}$ und für $\frac{t}{b} = {}^1/_6$, $c_a = 0{,}0794\,\frac{\alpha^0}{1^0}$. Beim unendlich breiten Flügel ist der Wert $c_a = \frac{2\pi}{57{,}3^0}\,\alpha^0 = 0{,}11\,\frac{\alpha^0}{1^0}$, wovon der c_a Wert bei $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ 80 vH, bei $\frac{t}{b} = {}^1/_6$ aber 72 vH ausmacht. Abb. 5 gibt für dieselben Seitenverhältnisse die Verringerung des Anstellwinkels durch das Wirbelband und Abb. 6 endlich den Beiwert des induzierten Widerstandes. Setzt man den induzierten Widerstand gleich $c_{wi}\,{}^1/_2\,\varrho\,v^2\,b\,t$, so findet man:

$$\frac{1}{(\alpha^0)^2}\,\frac{d\,c_{wi}}{d\,\xi} = \frac{2\,b}{t}\left(\frac{\pi}{180^0}\right)^2 \frac{1}{\frac{2}{\pi}\,\frac{b}{t} + c_0}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_m}\left(1 - \frac{2}{\pi}\,\frac{b}{t}\,\frac{1}{\frac{2}{\pi}\,\frac{b}{t} + c_0}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_m}\right).$$

In der folgenden Zahlentafel sind für das Längenverhältnis ${}^1/_{10}$ und ${}^1/_6$ die verschiedenen, nach den vorstehenden Formeln berechneten Werte zusammengestellt.

Zahlentafel zum zweiten Beispiel.

	ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	1
$\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$	$\frac{\Gamma}{\Gamma_m}$	1	0,995	0,976	0,933	0,835	0,710	0,586	0,421	0
	$\frac{1}{\alpha^0}\,\frac{d\,c_a}{d\,\xi}\,10^2$	4,88	4,85	4,77	4,55	4,07	3,46	2,86	2,05	0
	$\frac{1}{\alpha^0}\,\frac{v_1}{v}$	0,109	0,113	0,130	0,169	0,253	0,373	0,478	0,624	1
	$\frac{1}{(\alpha^0)^2}\,\frac{d\,c_{wi}}{d\,\xi}\,10^4$	0,930	0,960	1,081	1,34	1,814	2,22	2,38	2.24	0
$\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$	$\frac{\Gamma}{\Gamma_m}$	1	0,990	0,962	0,910	0,788	0,660	0,524	0,370	0
	$\frac{1}{\alpha^0}\,\frac{d\,c_a}{d\,\xi}\,10^2$	4,51	4,47	4,35	4,11	3,56	2,98	2,36	1,67	0
	$\frac{1}{\alpha^0}\,\frac{v_1}{v}$	0,177	0,186	0,209	0,252	0,352	0,457	0,569	0,696	1
	$\frac{1}{(\alpha^0)^2}\,\frac{d\,c_{wi}}{d\,\xi}\,10^4$	1,40	1,451	1,584	1,803	2,18	2,38	2,36	2,03	0

Durch Integration findet man bei $\frac{b}{t} = {}^1/_{10}$ eine Abweichung von etwa 10 vH, bei $\frac{t}{b} = {}^1/_6$ von etwa 5 vH vom Minimum des induzierten Widerstandes. Im Bereiche der praktisch vorkommenden Seitenverhältnisse kann die für elliptische Verteilung geltende Prandtlsche Formel $c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi}\,\frac{t}{b}$, beim rechteckigen Flügel näherungsweise durch

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi}\left(0{,}96\,\frac{t}{b} + 0{,}014\right)$$

ersetzt werden. 29

Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung.

Von E. POHLHAUSEN in Warnemünde.

In einer strömenden Flüssigkeit sind Wärmeleitung und Wärmekonvektion Vorgänge, die mit der inneren Reibung (oder Impulsleitung) und mit der Impulskonvektion große Aehnlichkeit besitzen. Mathematisch findet dies seinen Ausdruck in dem gleichartigen Bau der Differentialgleichungen, die einerseits für die Temperatur und anderseits für den Geschwindigkeitsvektor in der Flüssigkeit bestehen. Man kann daraus auf eine Beziehung

Haben beide denselben Gesamtauftrieb, so ergibt sich $\Gamma_m^{(1)} = \Gamma_m^{(2)} + \frac{a}{4}$. Wir setzen also: $\Gamma_m^{(2)} = (1-\delta)\,\Gamma_m^{(1)}$, d. h. $a = 4\,\delta\,\Gamma_m^{(1)}$, dann wird

$$\Gamma_d = \Gamma^{(1)} - \Gamma^{(2)} = \delta\,\Gamma_m^{(1)} \sqrt{1-\left(\frac{2x}{b}\right)^2}\left[1-4\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right],\quad v_1^{(1)} - v_1^{(2)} = \frac{3\delta}{2b}\,\Gamma_m^{(1)}\left[1-4\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right]$$

und

$$W_d = \varrho\,\frac{3\,\delta^2\,\Gamma_m^{(1)2}}{2b}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{2x}{b}\right)^2}\left[1-4\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right]^2 dx = \varrho\,\frac{3\pi}{8}\,\delta^2\,\Gamma_m^{(1)2}.$$

Wir erhalten also:

$$A = \frac{b\pi}{4}\,\varrho v \Gamma_m^{(1)},\quad W^{(1)} = \frac{\varrho\pi}{8}\,\Gamma_m^{(1)2},\quad W^{(2)} = W^{(1)} + W_d = \frac{\varrho\pi}{8}\,\Gamma_m^{(1)2}\,(1+3\,\delta^2).$$

Da nach (13) die Auftriebsverteilung $dA = \varrho v \Gamma(x)\,dx$ der Zirkulationsverteilung proportional ist, gibt die Zirkulation zugleich ein Bild der Auftriebsverteilung über die Flügelbreite. In Abb. 2 sind im Bereiche $-{}^1/_2 < \delta < {}^1/_2$ einige Auftriebsverteilungen gezeichnet, wobei $\varrho\,v\,\Gamma_m^{(1)}$, d. h. der Auftrieb in der Mitte bei der elliptischen Verteilung gleich Eins gesetzt ist. Den Fällen dieser Abbildung entsprechend sind in Abb. 3 die Winkel $\frac{v_1}{v}$, um die der Anstellwinkel des Flügels gegen die Hauptströmung v durch das Feld des Wirbelbandes heruntergesetzt wird, eingetragen, wobei $\frac{\Gamma_m^{(1)}}{2bv}$, d. h. die Winkeländerung in der Mitte bei der elliptischen Verteilung gleich Eins gesetzt ist. Wenn δ sehr klein ist, wie es wohl meist der Fall sein wird, ist auch die Abweichung des induzierten Widerstandes vom Minimum, $\varrho\,\frac{3\pi}{8}\,\delta^2\,\Gamma_m^{(1)2}$, nur sehr gering. Es ist aber wohl denkbar, daß der Auftrieb in der Mitte gegenüber der elliptischen Verteilung nicht unerheblich abweicht (man denke etwa an eine Herabsetzung durch einen Kühler oder eine Heraufsetzung des Auftriebs durch den Propeller in der Mitte); dann könnte auch der indu-

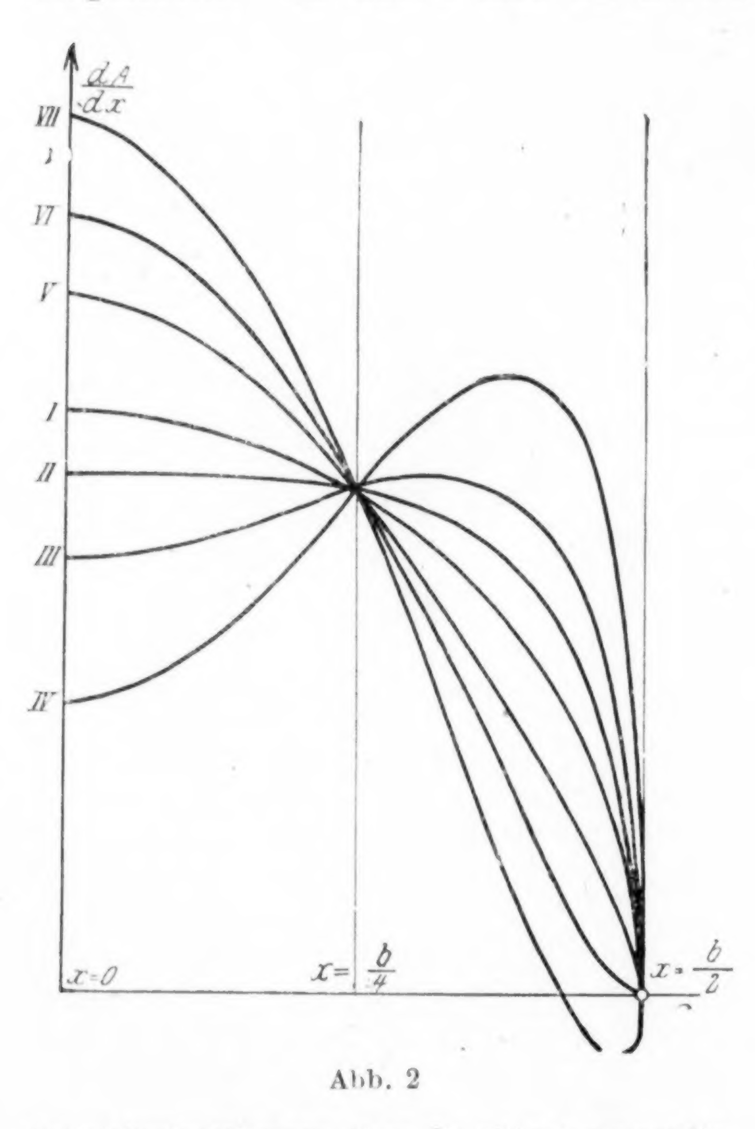


Abb. 2

Auftriebsverteilungen über die Flügelspannweite bei gleichem Gesamtauftrieb. I elliptische Verteilung (in der Mitte gleich 1 gesetzt). II Auftrieb in der Mitte konstant III und IV Auftrieb in der Mitte verringert. V, VI und VII Auftrieb in der Mitte erhöht; bei VII Abtrieb an den Flügelenden.

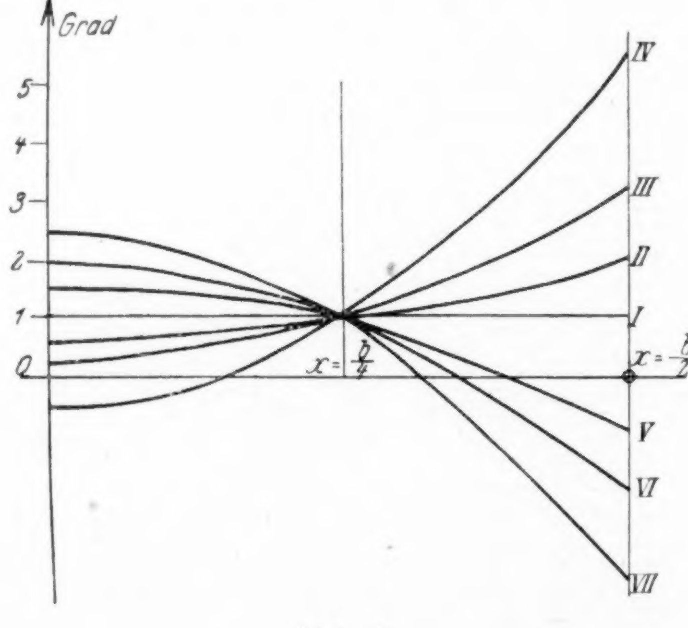


Abb. 3

Verringerung des Anstellwinkels durch das Wirbelband, entsprechend den Auftriebsverteilungen der Abb. 2. Für die elliptische Verteilung (I) ist dieser Winkel gleich 1° angenommen.

zierte Widerstand erheblich von seinem Minimum abweichen. In den extremsten der gezeichneten Fälle IV und VII, $\delta = \mp {}^1/_2$, würde diese Abweichung 75 vH betragen.

7. Als zweites Beispiel werde die Aufgabe behandelt, die Auftriebsverteilung für einen rechteckig umrandeten Flügel von überall gleichem Profil und Anstellwinkel zu suchen. Eine Lösung dieser Aufgabe hat Betz in seiner schon erwähnten Dissertation gegeben. Da die Ergebnisse aber dort durch eine rechnerisch recht mühsame Methode (Reihen mit 25 Gliedern) gefunden sind, erscheint eine Lösung mit wesentlich einfacheren Hilfsmitteln nicht überflüssig.

Bezeichnet α_1 den wirksamen Anstellwinkel des Flügels, d. h. den Winkel, der sich aus dem Winkel α gegen die Hauptströmung durch Verkleinerung um $\frac{v_1(x)}{v}$ ergibt, so daß $\Gamma(x) = t\,v\,\pi\,\alpha_1(x) = t\,v\,\pi\left(\alpha - \frac{v_1(x)}{v}\right)$ ist, so wird

$$\alpha = \frac{\Gamma(x)}{t\,v\,\pi} + \frac{v_1(x)}{v}.$$

Unsere Aufgabe besteht also darin, $\Gamma(x)$ so einzurichten, daß bei konstantem t in dem Bereiche $-\frac{b}{2} < x < +\frac{b}{2}$ auch α eine Konstante wird.

Wir setzen zur Lösung dieser Aufgabe in erster Näherung:

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma_m^{(1)} \sqrt{1-\left(\frac{2x}{b}\right)^2}\left[1+a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right], \quad v_1^{(1)}(x) = \frac{\Gamma_m^{(1)}}{2b}\left[1-\frac{a}{2}+3a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right].$$

Wird der Wert von α_1 für $x=0$ mit $\alpha_1^{(m)}$ bezeichnet, so folgt aus $\Gamma_m = t\,v\,\pi\,\alpha_1^{(m)}$:

$$\frac{\alpha}{\alpha_1^{(m)}} = \sqrt{1-\left(\frac{2x}{b}\right)^2}\left[1+a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right] + \frac{\pi}{2}\frac{t}{b}\left[1-\frac{a}{2}+3a\left(\frac{2x}{b}\right)^2\right].$$

Um diese Funktion in dem gegebenen Intervall möglichst einer Konstanten anzupassen, wählen wir a so, daß die zu $\frac{\alpha}{\alpha_1^{(m)}}$ gehörige Kurve bei $x=0$ an ihre Tangente eine Berührung vierter Ordnung hat. Man findet dabei:

$$a = {}^1/_2 \frac{1}{1+\frac{3\pi}{2}\frac{t}{b}}.$$

Der in der Praxis vorkommende Bereich des Seitenverhältnisses $\frac{t}{b}$ ist etwa $\frac{1}{10} < \frac{t}{b} < \frac{1}{6}$. Bestimmt man die α-Kurve für $\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$ und $\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$, so findet man, daß schon bei dieser Näherung der Anstellwinkel über mehr als die Hälfte des Flügels konstant bleibt — bei $x = 0{,}6\,\frac{b}{2}$ beträgt die Abweichung erst etwa $2\,{}^1/_2$ vH —; ein wesentlicher Abfall zeigt sich erst am Ende. Erheblich weiter führen dann die Näherungen:

$$\Gamma^{(2)} = \Gamma_m^{(2)} \sqrt{1-\left(\frac{2x}{b}\right)^2}\left[1+a_2\left(\frac{2x}{b}\right)^2+a_4\left(\frac{2x}{b}\right)^4\right],$$

$$\Gamma^{(3)} = \Gamma_m^{(3)} \sqrt{1-\left(\frac{2x}{b}\right)^2}\left[1+a_2\left(\frac{2x}{b}\right)^2+a_4\left(\frac{2x}{b}\right)^4+a_6\left(\frac{2x}{b}\right)^6\right]$$

usw., bei denen man die Berührungen der α-Kurve an die Tangente bei $x=0$ bis zur 6., 8. usw. Ordnung treiben kann. Man findet bei der dritten Näherung eine praktisch ausreichende Konstanz für α bis $x = 0{,}9\,\frac{b}{2}$, während der Winkel im letzten Zehntel der Flügelbreite immer noch um 75 vH abfällt.

Viel schneller aber kommt man durch das folgende Korrekturverfahren zum Ziel: Wir setzen bei irgend einer Näherung $v_1(x) = \frac{\Gamma_n}{2b}\left(c_0 + c_1\left(\frac{2x}{b}\right)^2 + \ldots\right)$. Nennen wir $\alpha^{(m)}$ den Wert von α für $x=0$, so wird $\frac{\alpha^{(m)}}{\alpha_1^{(m)}} = 1 + \frac{\pi}{2}\frac{t}{b}c_0$; für die Abweichung des

Winkels von seinem Werte in der Mitte wird sich ein Fehler $\frac{\alpha - \alpha^{(m)}}{\alpha_1^{(m)}} = \varepsilon(x)$ ergeben, den den man leicht durch eine Parabel approximieren kann. Wir ersetzen nun

$$\Gamma(x) \text{ durch } \Gamma(x)\left[1 + \frac{\varepsilon(x)}{1 + \frac{\pi}{2}\frac{t}{b}c_0}\right];$$

den verbesserten Wert für $\frac{\alpha}{\alpha_1^{(m)}}$ kann man dann leicht ausrechnen und findet, daß dieser Wert schon bei der ersten Näherung bis $x = 0{,}95\,\frac{b}{2}$ hin praktisch konstant bleibt. Die Γ-Werte aber, die man bei dieser Korrektur zu den ersten drei Näherungen bekommt, unterscheiden sich so gut wie gar nicht mehr. Zur Erlangung der Γ-Werte reicht man also praktisch mit der ersten Näherung und dem angegebenen Korrekturverfahren vollständig aus. Für viele Fragen aber wird, bei der Kleinheit der Unterschiede, die erste Näherung auch schon ohne Korrektur genügen.

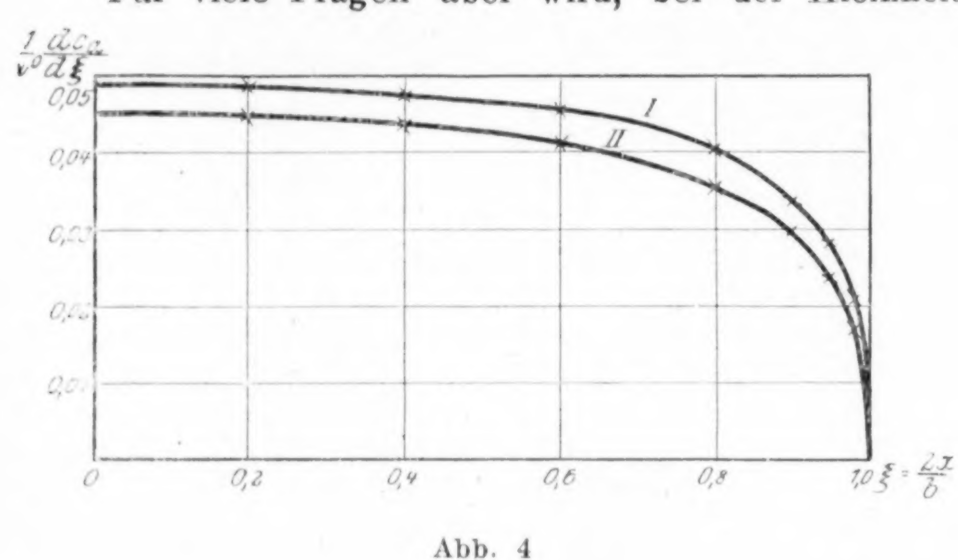


Abb. 4

Verteilung des Auftriebsbeiwertes beim rechteckigen Flügel über die Spannweite. Seitenverhältnis $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ bei I, ${}^1/_6$ bei II.

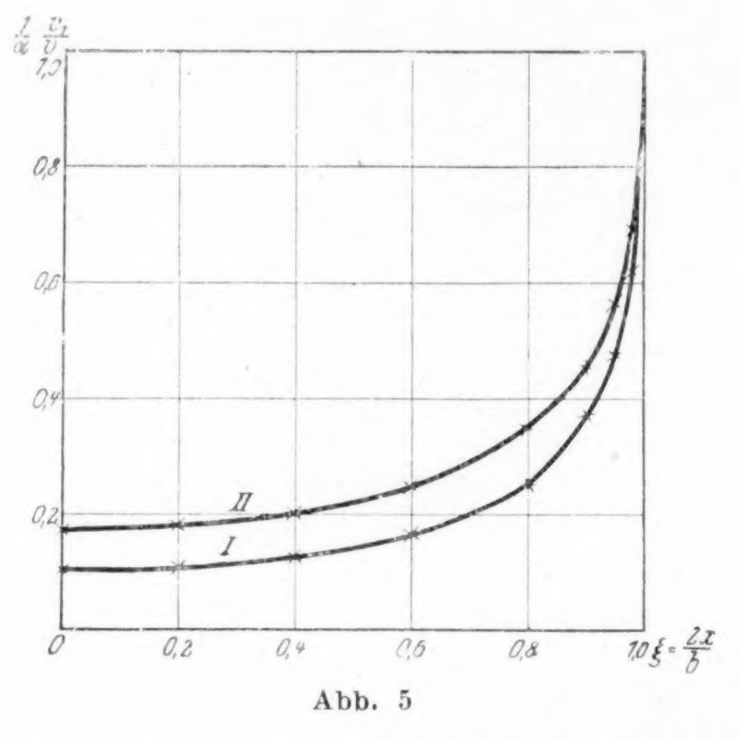


Abb. 5

Verringerung des Anstellwinkels durch das Wirbelband beim rechteckigem Flügel. Seitenverhältnis $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ bei I, ${}^1/_6$ bei II.

Es ist $\Gamma_m = t\,\pi\,v\,\alpha_1^{(m)} = \frac{2\,b\,v\,\alpha}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t} + c_0}$. Für c_0 findet man mit der Korrektur bei ${}^1/_{10}$ den Wert 0,779, bei ${}^1/_6$ den Wert 0,824. Weiter wird

$$dA = \varrho\,v\,\Gamma\,dx = \frac{2\,\varrho\,v^2\,b\,\alpha}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t} + c_0}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_m}\,dx.$$

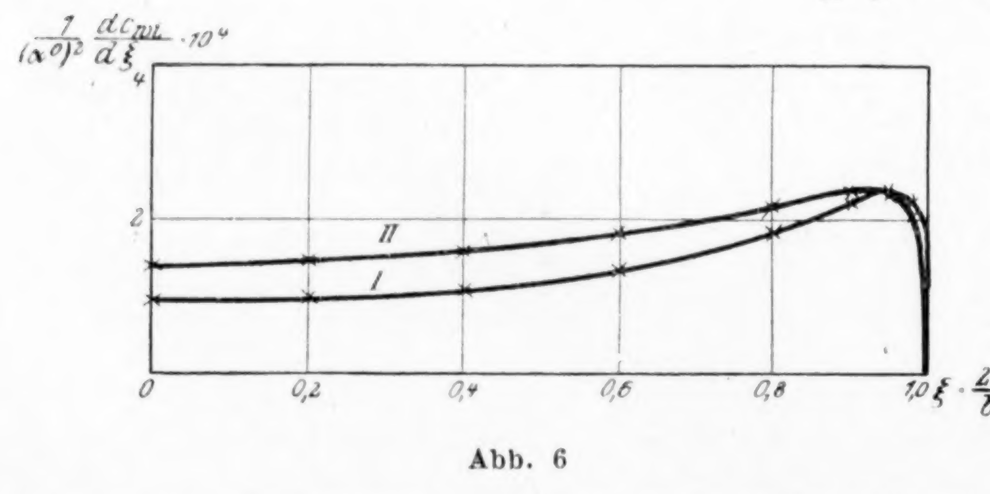


Abb. 6

Verteilung des Beiwertes des induzierten Widerstandes beim rechteckigen Flügel über die Spannweite. Seitenverhältnis $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ bei I, ${}^1/_6$ bei II.

Setzt man also in der jetzt üblichen Weise $A = {}^1/_2\,c_a\,\varrho\,v^2\,b\,t$, so erhält man, wenn man sich noch durch Einführung von $\xi = \frac{2x}{b}$ von dem zufälligen Werte von b freimacht:

$$\frac{1}{\alpha^0}\frac{d\,c_a}{d\,\xi} = \frac{2\,\pi}{180^0}\,\frac{b}{t}\,\frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{b}{t} + c_0}\,\frac{\Gamma}{\Gamma_m}.$$

In Abb. 4 ist diese Verteilung des Auftriebsbeiwertes wieder für $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ und $\frac{t}{b} = {}^1/_6$

angegeben. Durch Integration erhält man daraus für $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$, $c_a = 0{,}088 \frac{\alpha^0}{1^0}$ und für $\frac{t}{b} = {}^1/_6$, $c_a = 0{,}0794 \frac{\alpha^0}{1^0}$. Beim unendlich breiten Flügel ist der Wert $c_a = \frac{2\pi}{57{,}3^0} \alpha^0 = 0{,}11 \frac{\alpha^0}{1^0}$, wovon der c_a Wert bei $\frac{t}{b} = {}^1/_{10}$ 80 vH, bei $\frac{t}{b} = {}^1/_6$ aber 72 vH ausmacht. Abb. 5 gibt für dieselben Seitenverhältnisse die Verringerung des Anstellwinkels durch das Wirbelband und Abb. 6 endlich den Beiwert des induzierten Widerstandes. Setzt man den induzierten Widerstand gleich $c_{wi}\, {}^1/_2\, \varrho\, v^2\, b\, t$, so findet man:

$$\frac{1}{(\alpha^0)^2} \frac{d\, c_{wi}}{d\, \xi} = \frac{2\, b}{t} \left(\frac{\pi}{180^0}\right)^2 \frac{1}{\frac{2}{\pi} \frac{b}{t} + c_0} \frac{\Gamma}{\Gamma_m} \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{b}{t} \frac{1}{\frac{2}{\pi} \frac{b}{t} + c_0} \frac{\Gamma}{\Gamma_m}\right).$$

In der folgenden Zahlentafel sind für das Längenverhältnis ${}^1/_{10}$ und ${}^1/_6$ die verschiedenen, nach den vorstehenden Formeln berechneten Werte zusammengestellt.

Zahlentafel zum zweiten Beispiel.

	ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0 95	0,98	1
$\frac{t}{b} = \frac{1}{10}$	$\frac{\Gamma}{\Gamma_m}$	1	0,995	0,976	0,933	0,835	0,710	0,586	0,421	0
	$\frac{1}{\alpha^0} \frac{d\, c_a}{d\, \xi} 10^2$	4,88	4 85	4,77	4,55	4,07	3,46	2,86	2,05	0
	$\frac{1}{\alpha^0} \frac{v_1}{v}$	0,109	0,113	0,130	0,169	0,253	0,373	0,478	0 624	1
	$\frac{1}{(\alpha^0)^2} \frac{d\, c_{wi}}{d\, \xi} 10^4$	0,930	0,960	1,081	1,34	1,814	2,22	2,38	2.24	0
$\frac{t}{b} = \frac{1}{6}$	$\frac{\Gamma}{\Gamma_m}$	1	0,990	0,962	0,910	0,788	0,660	0,524	0,370	0
	$\frac{1}{\alpha^0} \frac{d\, c_a}{d\, \xi} 10^2$	4,51	4,47	4,35	4,11	3,56	2,98	2,36	1,67	0
	$\frac{1}{\alpha^0} \frac{v_1}{v}$	0,177	0,186	0,209	0,252	0,352	0,457	0,569	0,696	1
	$\frac{1}{(\alpha^0)^2} \frac{d\, c_{wi}}{d\, \xi} 10^4$	1,40	1,451	1,584	1,803	2,18	2,38	2,36	2,03	0

Durch Integration findet man bei $\frac{b}{t} = {}^1/_{10}$ eine Abweichung von etwa 10 vH, bei $\frac{t}{b} = {}^1/_6$ von etwa 5 vH vom Minimum des induzierten Widerstandes. Im Bereiche der praktisch vorkommenden Seitenverhältnisse kann die für elliptische Verteilung geltende Prandtlsche Formel $c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi} \frac{t}{b}$, beim rechteckigen Flügel näherungsweise durch

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi} \left(0{,}96 \frac{t}{b} + 0{,}014\right)$$

ersetzt werden. 29

Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung.

Von **E. POHLHAUSEN** in Warnemünde.

In einer strömenden Flüssigkeit sind Wärmeleitung und Wärmekonvektion Vorgänge, die mit der inneren Reibung (oder Impulsleitung) und mit der Impulskonvektion große Aehnlichkeit besitzen. Mathematisch findet dies seinen Ausdruck in dem gleichartigen Bau der Differentialgleichungen, die einerseits für die Temperatur und anderseits für den Geschwindigkeitsvektor in der Flüssigkeit bestehen. Man kann daraus auf eine Beziehung

zwischen dem Wärmeaustausch und dem Reibungswiderstand schließen, die eine strömende Flüssigkeit an einem festen Körper hervorrufen. Dies ist zuerst von Prandtl ausgesprochen und durchgeführt worden[1]), und zwar für turbulente Vorgänge, unter der vereinfachenden Annahme von Wärmequellen und -senken im Innern der Flüssigkeit.

In einer Strömung mit kleiner innerer Reibung lassen sich nun die hydrodynamischen Differentialgleichungen im Bereich einer an einem festen Körper anliegenden Grenzschicht vereinfachen, indem man, ebenfalls von Prandtl[2]) zuerst angegebene Abschätzungen über die relative Größenordnung der einzelnen Glieder der Differentialgleichungen durchführt. Hier soll zunächst gezeigt werden, daß durch die gleichen Abschätzungen bei kleiner Wärmeleitung auch eine Vereinfachung der Differentialgleichung für die Temperatur der Flüssigkeit in der Nähe eines festen Körpers erreicht wird. Dadurch gelingt es, die Wärmeabfuhr von einer dünnen Platte durch eine Parallelströmung zu berechnen sowie die Temperatur einer solchen Strömung aus der Angabe eines Plattenthermometers zu ermitteln. Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Hrn. Prof. Prandtl.

1. Bezeichnungen. Größenordnung. Wir beschränken unsere Betrachtungen auf ebene und stationäre Strömungen von volumbeständigen und schwerelosen Flüssigkeiten und nennen:

λ die Wärmeleitfähigkeit,
ν den kinematischen Reibungskoeffizienten,
c die spezifische Wärme (bei der Anwendung auf Gase $= c_p$ zu setzen),
ϱ die Dichte,
u, v die Geschwindigkeitskomponenten,
T die Temperatur,
p den Druck der Flüssigkeit.

Umströmt eine Flüssigkeit mit sehr kleiner innerer Reibung einen festen Körper, so wird — dies die allgemeine Annahme der heutigen Hydromechanik — die Strömung in größerer Entfernung vor dem Körper annähernd übereinstimmen mit der Potentialströmung, welche die Hydrodynamik reibungsloser Flüssigkeiten für den Körper ergibt. An der Wand des festen Körpers dagegen bildet sich eine Grenzschicht aus, da die reibende Flüssigkeit bei noch so kleiner Reibung an dem festen Körper haften muß. In dieser Grenzschicht steigt die Geschwindigkeit der Strömung vom Werte Null bis zu dem der Potentialströmung entsprechenden an. Je kleiner die Reibung der Flüssigkeit ist, um so dünner wird auch die Grenzschicht, um so stärker muß also auch der Geschwindigkeitsanstieg werden. Nimmt man bei einer ebenen Strömung die Bogenlänge der Körperumgrenzung als x-Koordinate, ihre Normale als y-Richtung und hat die Grenzschicht in der y-Richtung die Dicke ε, so muß, damit u in dem Bereich $0 \leqq y \leqq \varepsilon$ von Null zu endlichen Werten ansteigt:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \text{ von der Größenordnung } \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ von der Größenordnung } \frac{1}{\varepsilon^2} \text{ sein;}$$

während $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ in ihrer Größenordnung von der mehr oder weniger geringen Dicke der Grenzschicht unberührt bleiben und für den Zweck unserer Abschätzung von der Größenordnung 1 angenommen werden können. Aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

folgt, daß dann auch $\frac{\partial v}{\partial y}$ von der Größenordnung 1 ist; v hat daher innerhalb der Grenzschicht die Größenordnung ε.

Ist die Flüssigkeit ein sehr schlechter Wärmeleiter, so kann ihre Temperatur $\overline{T}$, wenn man von Wärmestrahlung absieht, in großer Entfernung vor einem festen Körper durch dessen Anwesenheit nicht viel geändert werden, auch wenn der feste Körper die Temperatur $T_1 \gtrless T$ hat. Betrachten wir insbesondere die Strömung eines vollkommenen Gases, deren Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ klein ist gegen die Schallgeschwindigkeit in dem Gase,

[1]) L. Prandtl, Phys. Ztschr. 11, 1910, S.

[2]) L. Prandtl, Verhandlungen d. III. intern Math.-Kongresses zu Heidelberg, Leipzig 1904 S. 484.

so wird an einer Stelle in einiger Entfernung vor dem Körper, wo die Geschwindigkeit $\overline{\mathfrak{w}}$ sein mag, die Temperatur $\overline{T}$ des strömenden und schlecht wärmeleitenden Gases durch den Ausdruck:

$$\overline{T} = T_0 - \frac{A}{2\,c_p}\left(\mathfrak{w}_0{}^2 - \overline{\mathfrak{w}}^2\right)$$

wiedergegeben, worin $\mathfrak{w}_0$, T_0 die Geschwindigkeit bezw. die Temperatur des Gases in unendlicher Entfernung bezeichnen und A das thermische Arbeitsäquivalent $= 0{,}24 \cdot 10^{-7}$ erg/cal ist. Der Anstieg von dieser Strömungstemperatur $\overline{T}$ zur Temperatur T_1 des festen Körpers vollzieht sich erst in unmittelbarer Nähe des Körpers. Hat die Grenzschicht, in der dieser Anstieg vor sich geht, die Dicke ε_1, so muß, damit T in dem Bereich $0 \leq y \leq \varepsilon_1$ eine endliche Aenderung erfährt:

$$\frac{\partial T}{\partial y} \text{ von der Größenordnung } \frac{1}{\varepsilon_1},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \text{ von der Größenordnung } \frac{1}{\varepsilon_1{}^2} \text{ sein,}$$

während $\frac{\partial T}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ wieder von der vergleichsweisen Größenordnung 1 bleiben.

2. Differentialgleichungen und Randbedingungen. Wir schreiben nun die Differentialgleichungen an, nach denen Geschwindigkeit, Druck und Temperatur in der Flüssigkeit verlaufen. Wir wissen, daß der Ausdruck:

$$q = A\nu\varrho\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]$$

die Wärmemenge angibt, die in der Flüssigkeit pro Volumen- und Zeiteinheit durch die innere Reibung erzeugt wird[1]). Unter die einzelnen Glieder der Differentialgleichungen schreiben wir ihre Größenordnung im Bereiche der Grenzschichten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$1 \qquad 1$$

$$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$1 \qquad \frac{1}{\varepsilon^2} \qquad\qquad 1 \qquad 1 \;\; 1 \qquad \varepsilon\;\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon \qquad \frac{1}{\varepsilon} \qquad\qquad\qquad 1 \;\; \varepsilon \qquad \varepsilon \;\; 1$$

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + A\nu\varrho\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] = \varrho c\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

$$1 \qquad \frac{1}{\varepsilon_1{}^2} \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 1 \qquad \left(\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\right)^2 \qquad\qquad 1\;\;1 \qquad \varepsilon\;\frac{1}{\varepsilon_1}$$

Innere Reibung und Wärmeleitung gewinnen Einfluß, wenn

ν von der Größenordnung ε^2,
λ von der Größenordnung $\varepsilon_1{}^2$ ist.

Dies zeigt, daß die Dicken der Grenzschichten, in denen Reibung und Wärmeleitung sich bemerkbar machen, von den Größenordnungen:

$$\varepsilon^2 = \sqrt{\nu},\ \varepsilon_1 = \sqrt{\lambda} \text{ sind.}$$

Aus der dritten Gleichung erkennt man, daß $\frac{\partial p}{\partial y}$ von der Größenordnung ε ist; d. h. innerhalb der Grenzschicht kann der Druck und sein Gefälle längs der festen Wand als unabhängig von y betrachtet werden. Sind daher ν und λ von der gleichen Größenordnung klein, so bleiben zur Berechnung des Geschwindigkeits- und Temperaturverlaufes in der Grenzschicht die Gleichungen:

[1]) Zur Begründung dieses Ausdruckes sowie auch der folgenden Differentialgleichungen siehe G. Hamel, Elementare Mechanik, Leipzig 1912, S. 593.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + A \nu \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \varrho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Als Randbedingungen haben wir zunächst:

für $y = 0$: $u = 0$, $v = 0$.

Mit wachsendem y muß die Geschwindigkeit allmählich in die Potentialgeschwindigkeit übergehen. Da im Falle sehr kleiner Reibung kleine endliche Enfernungen von der Wand gegenüber den Abmessungen von der Ordnung ε die Rolle des Unendlichen spielen, können wir sagen, daß

für $y = \infty$: $u = \overline{u}(x) =$ der Potentialgeschwindigkeit am festen Körper sein muß.

Als Randbedingung für die Temperatur ist vorzuschreiben:

Entweder für $y = 0$: $T = T_1 =$ der Temperatur des festen Körpers.

Dies entspricht der Aufgabe, die durch die Strömung von dem festen Körper mit konstant gehaltener Temperatur T_1 in der Zeiteinheit abgeführte Wärmemenge Q zu finden. Diese ist:

$$Q = -\lambda \int_F \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} dF,$$

wenn F die Oberfläche des Körpers bezeichnet.

Oder für $y = 0$: $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0.$

Bei dieser Randbedingung ist die abgeführte Wärmemenge gleich Null. Der für $y = 0$ sich ergebende Wert T_1 $(y = 0)$ gibt dann die Temperatur an, auf die sich der feste Körper in der Strömung von der Temperatur T_0 einstellt (Thermometerproblem).

In beiden Aufgaben lautet die zweite Randbedingung:

für $y = \infty$: $T = \overline{T} = T_0 - \frac{A}{2 c_p} (\mathfrak{w}_0^2 - \overline{u}^2(x))$.

3. Die von einer Platte abgegebene Wärmemenge.

Wir teilen nun die Lösungen unserer Differentialgleichungen im einfachsten Falle mit: nämlich für eine ebene Platte, die parallel zu den Stromlinien einer Parallelströmung eingetaucht ist.

Da längs der Platte kein Druckgefälle eintritt, lauten die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ &\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + A \nu \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \varrho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots, \quad \text{(I)}$$

Die Randbedingungen für u und v sind:

für $y = 0$: $u = 0$, $v = 0$,

für $y = \infty$: $u = \overline{u} =$ konst. Geschwindigkeit der Potentialströmung.

Behandeln wir zunächst die Aufgabe, die durch die Strömung von der Platte abgeführte Wärmemenge Q zu berechnen, so haben wir für T die Randbedingungen:

für $y = 0$: $T = T_1 =$ konst. Plattentemperatur,

für $y = \infty$: $T = T_0 =$ konst. Strömungstemperatur.

Sehen wir bei dieser Aufgabe ab von der Wärme, die im Innern der Flüssigkeit durch Reibung erzeugt wird, so lautet die Differentialgleichung für T:

$$\nu \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \varrho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I')}.$$

Um die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen, setzen wir an:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Führen wir ferner die neuen Variabeln ein:

$$\xi = {}^1/_2 \sqrt{\frac{u}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}}$$
$$\psi = \sqrt{\nu u} \sqrt{x}\, \zeta(\xi)$$
$$T = T_1 - (T_1 - T_0)\, \Theta(\xi),$$

so ist:

$$u = {}^1/_2\, u \frac{d\zeta}{d\xi}$$
$$v = {}^1/_2 \sqrt{\nu u} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\xi \frac{d\zeta}{d\xi} - \zeta\right).$$

Die Randbedingungen für ζ und Θ lauten daher:

für $\xi = 0$: $\zeta = 0$; $\zeta' = 0$; $\Theta = 0$;

für $\xi = \infty$: $\zeta' = 2$; $\Theta = 1$,

und die partiellen Differentialgleichungen (I') gehen über in die totalen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^3\zeta}{d\xi^3} + \zeta \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = 0$$
$$\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \sigma \zeta \frac{d\Theta}{d\xi} = 0,$$

worin σ die dimensionslose Zahl bedeutet:

$$\sigma = \frac{\nu \varrho c}{\lambda}.$$

Die Zahlenwerte für σ sind wegen der Unsicherheit in den Messungen der Wärmeleitfähigkeit λ wenig genau bestimmt. Es ist etwa für:

1-atomige Gase	$\sigma = 0{,}666$
2- » »	$\sigma = 0{,}80$
3- » »	$\sigma = 0{,}91$
4- » »	$\sigma = 1{,}08$
Wasser von 0°	$\sigma = 15$
» » 10°	$\sigma = 10$
» » 20°	$\sigma = 7.$

Die Funktion $\zeta(\xi)$ ist von H. Blasius[1]) zuerst berechnet worden. Abb. 1 gibt ihren Verlauf wieder. Mit dieser Funktion ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung für die Temperatur:

$$\Theta = \alpha(\sigma) \int_0^{\xi} e^{-\sigma \int_0^{\xi} \zeta(\xi)\, d\xi}\, d\xi,$$

worin für $\alpha(\sigma)$ wegen der Randbedingung für $y = \xi = \infty$: $\Theta = 1$ zu setzen ist:

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\sigma \int_0^{\xi} \zeta(\xi)\, d\xi}\, d\xi}.$$

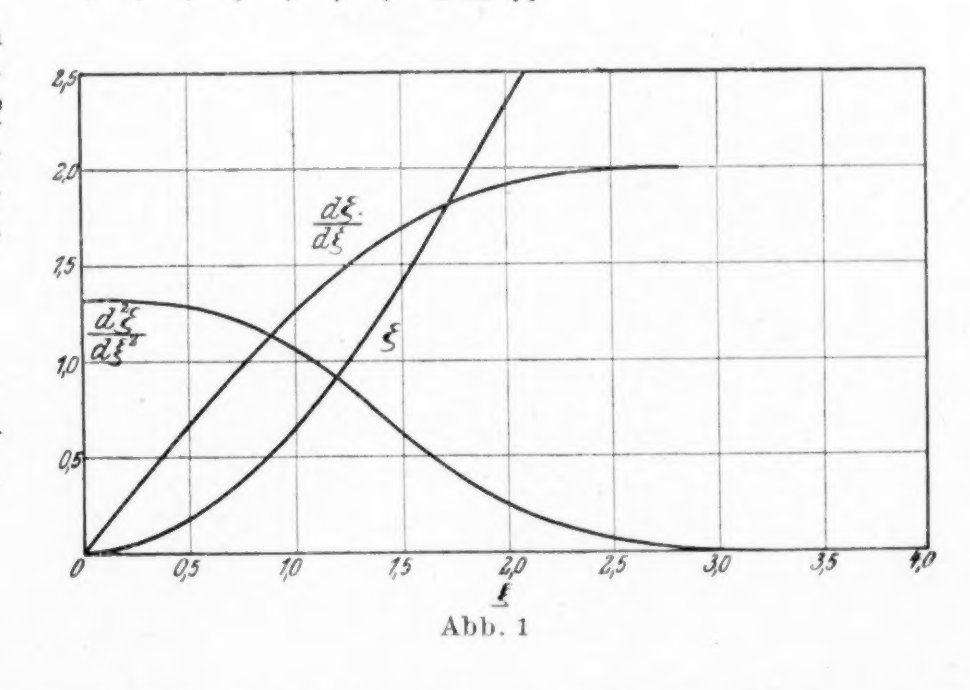


Abb. 1

In Abb. 2 ist der Verlauf der Funktion $\Theta(\xi)$ für die angegebenen Werte von σ aufgezeichnet. Da

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = \alpha(\sigma)\; e^{-\sigma \int_0^{\xi} \zeta(\xi)\, d\zeta}$$

ist, so folgt weiter:

$$\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)_{\xi = y = 0} = \alpha(\sigma).$$

---

[1]) H. Blasius, Zeitschrift f. Math. u. Physik, Bd. 56, 1908, S. 1.

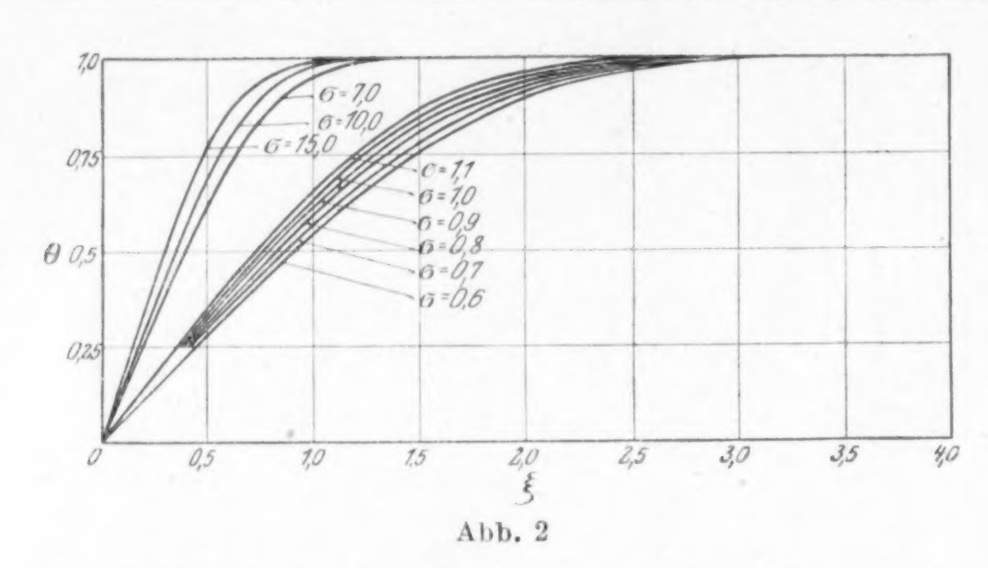


Abb. 2

Wir berechneten:

für $\sigma = 0{,}6$	$\alpha = 0{,}552$
$0{,}7$	$0{,}585$
$0{,}8$	$0{,}614$
$0{,}9$	$0{,}640$
$1{,}0$	$0{,}664$
$1{,}1$	$0{,}687$
$7{,}0$	$1{,}29$
$10{,}0$	$1{,}46$
$15{,}0$	$1{,}67$

Die in der Zeiteinheit von der einen Seite der Platte abgeführte Wärmemenge Q ist, wenn l die Länge der Platte bezeichnet, b ihre Breite:

$$Q = -\lambda \int_0^b \left(\int_0^l \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} d\,l \right) d\,b = \alpha(\sigma)\,\lambda \sqrt{\frac{\bar{u}\,l}{\nu}}\; b\,(T_1 - T_0),$$

wobei bemerkt sei, daß mit ziemlicher Annäherung $\alpha(\sigma) = 0{,}664 \sqrt[3]{\sigma}$ ist. Der Wert $\sigma = 0{,}664$ für $\sigma = 1$ entspricht dabei, wie es sein muß, der Prandtlschen Analogie zwischen Wärmeabgabe und Reibungswiderstand.

4. Die Anzeige eines Plattenthermometers. Das Thermometerproblem läßt sich für die ebene Platte ebenfalls durch Quadraturen lösen. Wir verstehen hierunter die Aufgabe, jene Temperatur zu bestimmen, die die Platte haben muß, wenn sie ohne Wärmeabgabe oder -aufnahme in der Strömung bestehen soll. Hier darf die im Innern der Flüssigkeit durch Reibung erzeugte Wärme nicht mehr vernachlässigt werden, so daß die Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + A \nu \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \varrho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Die Randbedingungen sind hier:

für $y = 0$: $u = 0$; $v = 0$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$;

für $y = \infty$: $u = \bar{u}$; $T = T_0$.

Wir führen wieder ein:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$\xi = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}}; \quad \psi = \sqrt{\nu \bar{u}} \sqrt{x}\; \zeta(\xi);$$

aber:

$$T = \bar{T} + \tfrac{1}{8} \frac{A \bar{u}^2}{c} \vartheta(\xi)$$

und erhalten die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^3 \zeta}{d \xi^3} + \zeta \frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} = 0$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{d \xi^2} + \sigma \zeta \frac{d \vartheta}{d \xi} + 2 \sigma \left(\frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} \right)^2 = 0$$

mit den Randbedingungen:

für $y = 0$: $\zeta = 0$; $\zeta' = 0$; $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right)_{\xi = 0} = 0$

für $y = \infty$: $\zeta' = 2$; $\vartheta = 0$.

Die Funktion $\zeta(\xi)$ ist dieselbe wie bei der vorhergehenden Aufgabe. Für $\vartheta(\xi)$ dagegen ergibt sich:

$$\vartheta(\xi) = \beta(\sigma) - 2\,\sigma \int_0^{\xi} e^{-\sigma\int_0^{\xi}\zeta\,d\xi} \left(\int_0^{\xi} \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)^2 e^{+\sigma\int_0^{\xi}\zeta\,d\xi}\, d\xi \right) d\xi\,.$$

Wegen der Randbedingung $y = \infty$: $\vartheta = 0$ ist:

$$\beta(\sigma) = +\,2\,\sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma\int_0^{\xi}\zeta\,d\xi} \left(\int_0^{\xi} \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)^2 e^{+\int_0^{\xi}\zeta\,d\xi}\, d\xi \right) d\xi\,.$$

Abb. 3 enthält den Verlauf von $\vartheta(\xi)$.

Wir berechneten:

für $\sigma = 0{,}6$	$\beta = 3{,}08$
0,7	3,34
0,8	3,58
0,9	3,80
1,0	4,00
1,1	4,20
7,0	10,06
10,0	11,86
15,0	14,14.

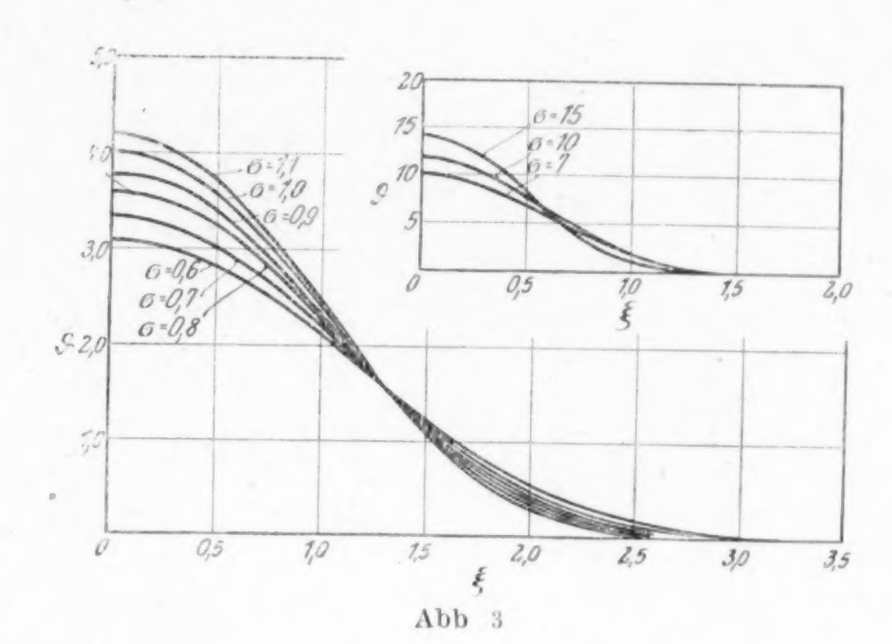


Abb 3

Die Korrektionen $\varDelta(\sigma)$, um welche die Anzeigen T_1 eines Plattenthermometers zu vermindern sind, um die Temperatur $\overline{T}$ der Strömung zu erhalten, sind:

$$\overline{T} = T_1 - \varDelta(\sigma)$$

$$\varDelta(\sigma) = +\,{}^1/_8\,\frac{A u^2}{c}\,\beta(\sigma)\,.$$

Bei Gasen kann man diese Temperaturkorrektion in Beziehung setzen zu der Temperaturerhöhung, die der adiabatischen Verdichtung an einem Standpunkt $T_0 - \overline{T} = {}^1/_2\,\frac{A u^2}{c}$ entspricht. Es ist also: $\varDelta(\sigma) = (T_0 - \overline{T})\,{}^1/_4\,\beta(\sigma)$.

In dem ausgezeichneten Fall $\sigma = 1$ wird ${}^1/_4\,\beta = 1$, also $T_1 = \overline{T} + \varDelta\,\sigma = T_0$; es wird hier bei einer nach der Bernoullischen Gleichung erfolgenden Strömung überhaupt keine Temperaturänderung gemessen. 19

Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse.

Von **R. v. MISES** in Berlin.

In einer sehr wertvollen kleinen Schrift »Das Gesetz der kleinen Zahlen« hat L. v. Bortkiewicz im Jahre 1898 darauf hingewiesen, welch große Bedeutung innerhalb der praktischen Statistik einer von Poisson herrührenden Formel für die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse zukommt. Es handelt sich dabei um folgende Aufgabe: Wird ein Versuch, der auf eine einfache Alternative (Kopf oder Adler, rot oder schwarz, leben oder sterben) führt, n mal wiederholt, so ist die Wahrscheinlichkeit w_x dafür, daß jener Versuchsausgang, der die Einzelwahrscheinlichkeit p besitzt, x mal eintritt, durch die bekannte Newtonsche Formel

$$w_x = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad 0 < p < 1, \quad 0 \leq x \leq n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gegeben. Hält man in diesem Ausdruck x fest, läßt n unbeschränkt wachsen und p so abnehmen, daß $np = a$ fest bleibt, so geht er, wie Poisson bemerkt hat, über in

$$w_x = \frac{a^x e^{-a}}{x!} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Man gelangt sofort von Gl. (1) zu Gl. (2), indem man den Binomialkoeffizienten in Gl. (1) ausführt, für p den Wert $a:n$ setzt und folgendermaßen die Faktoren ordnet:

$$w_x = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\;\ldots\;(n-x+1)}{n^x\left(1-\frac{a}{n}\right)^x}\,\frac{a^x}{x!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{n}}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{a}{n}}\;\ldots\;\frac{1-\frac{x-1}{n}}{1-\frac{a}{n}}\cdot\frac{a^x\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}{x!}.$$

Die ersten x Brüche rechts gehen mit wachsendem n jeder einzeln gegen 1, während der Faktor $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n$ vermöge der Definition von e gegen e^{-a} konvergiert.

Diese einfache, auf Poisson zurückgehende Ueberlegung ist recht wenig bekannt und man vermißt beispielsweise in dem umfassenden Lehrbuch von Czuber jede Erwähnung von Gl. (2). Es war das große Verdienst von v. Bortkiewicz, an zahlreichen Beispielen nachgewiesen zu haben, daß das in Gl. (2) enthaltene Verteilungsgesetz mit der Erfahrung ebenso gut übereinstimmt wie jedes andere sachgemäß angewandte Ergebnis der Wahrscheinlichkeitstheorie. Nur in der Wahl der Bezeichnung »Gesetz der kleinen Zahlen« können wir ihm nicht folgen und wollen lieber von der »Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse« sprechen, obwohl auch dieser — durch die Kleinheit von p begründete — Name nicht restlos befriedigen kann[1]). Aber da bekanntlich das Gesetz der »großen« Zahlen einem Fragenkomplex angehört, der aus Gl. (1) hervorgeht, wenn man n bei festem p sehr groß werden läßt, so scheint der Ausdruck »kleine Zahlen« dem Mißverständnis ausgesetzt, als handle es sich hier um kleine Werte von n; in Wahrheit ist aber auch hier dasselbe n eine sehr große Zahl und nur $n\,p$ und x sind kleine, d. h. endliche Größen. Das vielfache Mißtrauen, dem das »Gesetz der kleinen Zahlen« begegnet, ist nur dieser Verwechslung zuzuschreiben.

In den folgenden Zeilen soll eine, wie es scheint, nicht unwesentliche Erweiterung der Poissonschen Ableitung gegeben werden. Es zeigt sich nämlich, daß ein mit Gl. (2) ganz übereinstimmender, asymptotisch gültiger Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit der Wiederholungszahl x auch dann besteht, wenn die Einzelwahrscheinlichkeiten von Versuch zu Versuch schwanken, also die untereinander verschiedenen Werte p_1, $p_2\;\ldots\;p_n$ annehmen. Vorausgesetzt wird für den Grenzübergang, daß die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten oder die mittlere Erwartungszahl

$$p_1 + p_2 + \ldots\; p_n = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

fest bleibt. Die Ableitung wird in einer solchen Form gegeben, daß auch die Abweichung zwischen dem asymptotischen Ausdruck (2) und dem genauen Wert (1) bei großem, aber endlichem n abgeschätzt werden kann; an einem einfachen Zahlenbeispiel wird dann das Ergebnis erläutert.

1. Ansatz und Berechnung von w_0. Um uns kurz auszudrücken, wollen wir das Ereignis, für das beim ersten Versuch die Wahrscheinlichkeit p_1, beim zweiten $p_2\;\ldots$ beim n ten p_n besteht, als Eintritt einer »Eins« bezeichnen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß innerhalb der n Versuche genau x Einser eintreten, gleich dem Koeffizienten von t^x in der Entwicklung des Produktes

$$(1-p_1+p_1\,t)\,(1-p_2+p_2\,t)\;\ldots\;(1-p_n+p_n\,t) = \prod_{\iota=1}^{n}(1-p_\iota+p_\iota\,t) = \sum_{x=0}^{n} w_x\,t^x \quad (4).$$

Denn dieser Koeffizient ist die Summe aller möglichen Produkte aus n Faktoren, unter denen x Faktoren die Gestalt p_ι und $n-x$ die Gestalt $1-p_\iota$ haben. Vor allem erhält man für w_0, die Wahrscheinlichkeit, daß kein Einser eintritt, das Produkt aller $1-p_\iota$, also nach Uebergang zum natürlichen Logarithmus und Reihenentwicklung

$$-\ln w_0 = -\sum_{\iota=1}^{n}\ln(1-p_\iota) = \sum_{\iota=1}^{n} p_\iota + {}^1\!/_2\sum_{\iota=1}^{n} p_\iota^{\,2} + {}^1\!/_3\sum_{\iota=1}^{n} p_\iota^{\,3} + \ldots\ldots \quad (5).$$

Die erste der Summen rechts ist nach Gl. (3) gleich a. Nun führen wir für die einzelnen p_ι noch die notwendige Voraussetzung ein, daß sie alle kleiner seien als ein bestimmter echter Bruch p:

$$p_\iota \leq p,\;\; \iota = 1, 2\;\ldots\; n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

[1]) Am richtigsten wäre eigentlich: »Gesetz der großen Zahl bei kleiner Erwartungszahl«. v. Bortkiewicz will allerdings zum Ausdruck bringen, daß nicht nur die Erwartungszahl a, sondern auch die hauptsächlich interessierenden Werte der Wiederholungszahl x klein sind.

Dann ist jede der Potenzsummen in Gl. (5) kleiner als das $p$fache der vorangehenden, es fällt also die Reihe stärker ab als die geometrische Reihe mit dem Quotienten p. Da anderseits alle Glieder positiv sind, liegt die rechte Seite von Gl. (5) zwischen a und $a : (1-p)$. Wir haben somit:

$$e^{-a} \geqq w_0 \geqq e^{-\frac{a}{1-p}} \geqq e^{-a}\left(1-\frac{a\,p}{1-p}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Wenn p gegen null geht, nähert sich die obere Grenze von w_0 der unteren und beide werden in Uebereinstimmung mit Gl. (2) gleich e^{-a}.

2. Berechnung eines beliebigen w_x Um die Wahrscheinlichkeit w_x einer beliebigen, zwischen null und n gelegenen Ereigniszahl x zu bestimmen, heben wir in der Definitionsgleichung (4) den Faktor $w_0 = (1-p_1)(1-p_2) \dots$ heraus und erkennen in

$$\left(1+\frac{p_1}{1-p_1}\,t\right)\left(1+\frac{p_2}{1-p_2}\,t\right)\dots\left(1+\frac{p_n}{1-p_n}\,t\right) = \sum_{x=0}^{n}\frac{w_x}{w_0}\,t^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

daß $w_x : w_0$ der x te Koeffizient einer Gleichung n ten Grades in $1:t$ ist, deren n Wurzeln die negativ genommenen Größen

$$q_\iota = \frac{p_\iota}{1-p_\iota}, \qquad \iota = 1, 2 \dots n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

sind. Die q_ι liegen zwischen null und einer oberen Schranke q, für die zufolge Gl. (6) $p : (1-p)$ gesetzt werden kann:

$$q_\iota \leqq q = \frac{p}{1-p}, \qquad \iota = 1, 2 \dots n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Nun ist aber der x te Gleichungskoeffizient die x te elementar symmetrische Funktion der Wurzeln, d. h. die Summe aller Produkte aus je x dem Index nach verschiedenen q_ι-Werten. Stellen wir dieser Summe, die sich aus $\binom{n}{x}$ Summanden zusammensetzt, den aus n^x Gliedern bestehenden Ausdruck

$$(q_1 + q_2 + \dots q_n)^x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

gegenüber, so sehen wir, daß (11) jeden der $\binom{n}{x}$ Summanden von $w_x : w_0$ gerade $x!$ mal enthält (weil es so viele Umstellungen von x Elementen gibt), außerdem also noch

$$z = n^x - x!\binom{n}{x} = n^x - n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1) =$$
$$n^x\left[1-1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]$$

Summanden, von denen natürlich keiner negativ und keiner größer als q^x sein kann. Demnach liegt das $x!$fache von $w_x : w_0$ zwischen (11) und dem um $z\,q^x$ verminderten Wert von (11):

$$(q_1 + q_2 + \dots q_n)^x \geqq \frac{x!\,w_x}{w_0} \geqq (q_1 + q_2 + \dots q_n)^x - z\,q^x \quad . \quad . \quad (12).$$

Die Summe $q_1 + q_2 + \dots q_n$ ist einerseits kleiner als

$$\frac{p_1}{1-p} + \frac{p_2}{1-p} + \dots \frac{p_n}{1-p} = \frac{a}{1-p},$$

da hier die Nenner gegenüber den richtigen Nennern der q_ι nur verkleinert erscheinen, anderseits größer als $p_1 + p_2 + \dots p_n = a$, da unmöglich alle Nenner $1-p_\iota$ gleich eins sein können. Demgemäß entsteht aus Gl. (12), wenn wir noch durch a^x dividieren:

$$\frac{1}{(1-p)^x} \geqq \frac{x!\,w_x}{a^x\,w_0} \geqq 1-\frac{z\,p^x}{a^x\,(1-p)^x} = 1-\left(\frac{n\,p}{a\,(1-p)}\right)^x\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]. \quad (13).$$

Multipliziert man diesen Ansatz, um w_0 zu eliminieren, mit Gl. (7) und kürzt im Produkt durch e^{-a}, so erhält man endgültig:

$$\frac{1}{(1-p)^x} \geqq w_x\,\frac{x!}{a^x\,e^{-a}} \geqq \left(1-\frac{a\,p}{1-p}\right)\left\{1-\left(\frac{n\,p}{a\,(1-p)}\right)^x\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]\right\}. \quad (14).$$

Beide Außenglieder dieser Ungleichung gehen gegen 1, wenn p gegen null geht, n unbeschränkt wächst, dabei sowohl x als a und auch $n\,p$ endlich bleibt. Somit gilt die Poissonsche Formel (2) auch im Falle veränderlicher Grundwahrscheinlichkeiten, sobald deren größte mit $1:n$ von gleicher Ordnung klein

wird. Durch die Abweichung der beiden Außenglieder in Gl. (14) vom Werte 1 bei endlichem n sind die Fehlergrenzen gegeben.

3. Zahlenbeispiel. Nur um die Anwendung unseres Ergebnisses, das in Gl. (14) zum vollen Ausdruck kommt, zu erläutern, wollen wir ein Beispiel — mit willkürlich gewählten Zahlen — betrachten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Versicherter innerhalb des ersten Versicherungsjahres Selbstmord begeht, wird zweifellos mit dem Eintrittsalter des Versicherungsnehmers schwanken. Es sei nun festgestellt, daß der Größtwert dieser Wahrscheinlichkeiten den Wert $p = 0{,}002$ nicht überschreitet, während der mit Rücksicht auf die Altersschichtung berechnete Mittelwert 0,0015 beträgt. Gefragt wird nach den Wahrscheinlichkeiten w_0, w_1, w_2, w_3 dafür, daß unter $n = 1000$ Versicherten gerade $x = 0$, bezw. 1, 2, 3 im ersten Jahre Selbstmord begehen. Nach den Tabellen von v. Bortkiewicz[1]) hat man für $a = 1000 \cdot 0{,}0015 = 1{,}5$:

$$x = 0, \qquad e^{-a} = 0{,}2231,$$

$$x = 1, \qquad \frac{a\,e^{-a}}{1} = 0{,}3347,$$

$$x = 2, \qquad \frac{a^2\,e^{-a}}{2!} = 0{,}2510,$$

$$x = 3, \qquad \frac{a^3\,e^{-a}}{3!} = 0{,}1255.$$

Dies sind die nach der Poissonschen Formel (2) berechneten Näherungswerte für w_0, w_1 usw., die genau richtig wären, wenn man n unendlich statt $n = 1000$ hätte usw. Setzt man in unser Schlußergebnis Gl. (14) die Zahlen für a, n, p, wie sie gegeben sind, ein, so erhält man die Fehlergrenzen:

$$x = 0, \qquad 1 \geqq \frac{w_0}{0{,}2231} \geqq 0{,}9968,$$

$$x = 1, \qquad 1{,}0020 \geqq \frac{w_1}{0{,}3347} \geqq 0{,}9968,$$

$$x = 2, \qquad 1{,}0040 \geqq \frac{w_2}{0{,}2510} \geqq 0{,}9950,$$

$$x = 3, \qquad 1{,}0060 \geqq \frac{w_3}{0{,}1255} \geqq 0{,}9896,$$

oder in endgültiger Form:

w_0 liegt zwischen 0,2224 und 0,2231,
w_1 » » 0,3337 » 0,3353,
w_2 » » 0,2497 » 0,2520,
w_3 » » 0,1242 » 0,1262.

Man sieht, daß die Unterschiede zwischen der oberen und unteren Grenze recht gering sind, so gering, daß sie für praktische Fragen kaum in Betracht kommen. Natürlich werden die Abweichungen verhältnismäßig immer größer, wenn man zu größeren x übergeht; aber hier werden bald die w_x selbst so klein, daß sie nicht mehr von praktischer Bedeutung sind.

Unsere allgemeinen Betrachtungen schließen auch die Fehlerabschätzung für den alten Anwendungsbereich der Formel (2), den Fall unveränderlicher Grundwahrscheinlichkeiten, mit ein. Wir können also unsern Ergebnissen noch dies hinzufügen, daß der Poissonsche Ausdruck bei Zahlenwerten der hier betrachteten Größenordnung eine sehr brauchbare Annäherung an den genauen Ausdruck Gl. (1) liefert. Ueber die unmittelbare Prüfung an der Erfahrung, die ja für Gl. (1) kaum noch in Frage steht, ist oben schon etwas erwähnt worden.[2]) 17

Wien, im April 1920.

---

[1]) Das Gesetz der kleinen Zahlen, Leipzig 1898, S. 49.

[2]) In einer inzwischen erschienenen Abhandlung »Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik«, Phys. Zeitschr. 21, 1920, S. 225—232 und 256—262 habe ich von dem hier abgeleiteten Satz bereits Gebrauch gemacht.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Das Turbulenzproblem.

Von **F. NOETHER** in Berlin.

Die rationelle Hydromechanik [1]) liefert, wie bekannt, zweierlei Ansätze zur Lösung hydrodynamischer Aufgaben, die Eulerschen Grundgleichungen für ideale Flüssigkeiten und die von Navier und Stokes herrührenden Gleichungen für zähe (reibende) Flüssigkeiten. Doch die auf dieser Grundlage bisher gelösten Probleme beschränken sich im großen ganzen auf zwei Klassen, die nur vorläufigen Charakter haben:

1. die reibungsfreien Potentialströmungen,
2. diejenigen Strömungen von Flüssigkeiten mit Reibung, bei denen der Einfluß der Zähigkeit den der Trägheit stark überwiegt.

Es ist bekannt, daß die meisten technisch interessanten Flüssigkeitsströmungen in keine dieser beiden Gruppen eingeordnet werden können. Unser Problem speziell betrifft den Fall der Strömung von Flüssigkeiten in unbegrenzt langen prismatischen Leitungen; die Strömung wird dabei entweder durch ein Druck- oder Bodengefälle oder, wenn es sich um einen unendlich tiefen geradlinigen oder einen kreisringförmigen Kanal handelt, auch durch relative Verschiebung der einander gegenüberstehenden Wände hervorgerufen.

In diesen Fällen sind seit den experimentellen Arbeiten von Poiseuille [2]) und den theoretischen von Stokes [3]) die »Laminarströmungen« [4]) als mögliche Strömungsformen bekannt. Sie sind dadurch definiert, daß die Geschwindigkeit überall parallel den Wänden gerichtet ist; die Geschwindigkeitsverteilung ist in jedem Querschnitt die nämliche, sie ist im Falle fester Begrenzungen parabolisch, in dem bewegter Wände — der von Couette [5]) untersucht ist — linear; an den Wänden ruht die Flüssigkeit bezw. hat sie die Geschwindigkeit der bewegten Wände. Die durchströmende Flüssigkeitsmenge ist dem Druckgefälle (bezw. Sohlengefälle) proportional, bei bewegten Wänden ist die relative Geschwindigkeit der Wände der aufgewendeten Kraft proportional.

Diese Strömungsformen, zu denen die hydrodynamische Theorie der zweiten der oben erwähnten Klassen führt, werden aber praktisch nur beobachtet bei kleinen Geschwindigkeiten, bei sehr zähen Flüssigkeiten oder sehr engen Querschnittsdimensionen.

Schon Poiseuille [l. c. [2])] und in weiterem Umfange Hagen [6]) stellten fest, daß beim Ueberschreiten gewisser Grenzen für diese Größen (insbesondere bei Verringerung der kinematischen Zähigkeit, d. i. des Quotienten Zähigkeitskoeffizient durch Dichte, mittels Temperatursteigerung) die Strömung einen ganz andern Charakter annimmt. Die mittlere Geschwindigkeitsverteilung bleibt wieder in jedem Querschnitt die gleiche, die Geschwindigkeit ist aber viel gleichmäßiger als vorher über den Querschnitt verteilt und fällt am Rande rasch zu Null bezw. gegen die Randgeschwindigkeit ab. Dieser mittleren

---

[1]) Auf folgende zusammenfassende Berichte bezw. Lehrbücher wird im folgenden Bezug genommen: A. E. Love, Hydromechanik; Enz. d. math. Wiss. Bd. IV, Art. 15 u 16. — Forchheimer: Hydraulik; ebenda Bd. IV, Art 20. — H. Lamb: Lehrbuch der Hydromechanik; deutsch von J. Friedel, Leipzig 1907. — F. Auerbach: Die theoretische Hydrodynamik, Braunschweig 1881. — W. Wien: Hydrodynamik, Leipzig 1900. — Brillouin: Leçons sur la viscosité, I Teil, Paris 1907. — R. v. Mises, Technische Hydromechanik, I. Leipzig 1914.

[2]) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides; Comptes Rendus Paris, 11, 12 (1840, 41); Mém. des Savants Étrangers, 9 (1846). Ueber die nachfolgenden Arbeiten vergl. vor allem das oben zitierte Werk von Brillouin.

[3]) On the effect of the internal friction of fluids, Cambr. Trans. 9 (1851). S. insbesondere auch die Literaturangaben in dem Lehrbuch von H. Lamb.

[4]) Wir bezeichnen als »Laminarströmungen«, entsprechend dem Namen, soweit nichts anderes bemerkt ist, nur Strömungen in Parallelschichten, und zwar diejenigen, die exakte Lösungen der Stokesschen Gleichungen sind. In der Literatur ist die Bezeichnung öfters auch in allgemeinerem Sinne gebraucht.

[5]) Études sur le frottement des liquides, Ann. d. chimie et de physique (6, 21) (1890); p. 433; Journ. de Physique 2e série t. IX. (1890).

[6]) Abhandl. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1854.

Bewegung überlagern sich rasche und ungeordnete Pulsationen der Flüssigkeit, die auch Querbewegungen enthalten. Das aufzuwendende Druckgefälle wird erfahrungsgemäß annähernd dem Quadrat der Durchflußmenge bezw. die aufzuwendende Kraft dem Quadrat der relativen Geschwindigkeit der Wände proportional. Man bezeichnet gegenüber dem ersten, dem »laminaren« oder »Poiseuilleschen« Zustand, den zweiten als den »hydraulischen« oder den »turbulenten«. Doch wollen wir hier im folgenden die Bezeichnung »turbulent« nur für ein gewisses Uebergangsgebiet zwischen dem laminaren und hydraulischen Zustand verwenden.

Unter Turbulenzproblem versteht man, allgemein gesprochen, die Frage, warum der grundsätzlich immer mögliche Poiseuillesche Zustand nur begrenzt realisiert ist und dem hydraulischen Zustand Platz macht.

I. Uebersicht der experimentellen Ergebnisse.

1. Die Versuche ohne Berücksichtigung der Wandbeschaffenheit. Hagen[1]) beobachtete die Abhängigkeit der Durchflußmenge von der Temperatur in Röhren von verschiedener Weite und unter verschiedenem Druckgefälle. Da mit wachsender Temperatur die Zähigkeit abnimmt, findet er zunächst den Poiseuilleschen Zustand (lineare Zunahme mit der Temperatur), dann (bei hinreichend großen Drucken bezw. hinreichend weiten Röhren) ein Uebergangsgebiet, in dem die Durchflußmenge abnimmt (turbulenter Zustand, in dem die Flüssigkeit äußerlich sichtbar starke Unruhe zeigt), endlich den hydraulischen Zustand, in dem die Strömung zwar äußerlich ruhig, aber von den erwähnten kleinen Pulsationen begleitet ist (schwächere Zunahme mit der Temperatur, im beobachteten Gebiet annähernd linear). Durch eine irrige Theorie geleitet[2]), glaubte Hagen aus seinen Experimenten entnehmen zu dürfen, daß die »kritische Durchflußmenge« (nämlich die größte im Poiseuilleschen Zustand mögliche) der Länge des Rohres und dem reziproken Quadrat des Durchmessers proportional sei. Seine Zahlen sind aber hinreichend genau, um die Unrichtigkeit dieses Gesetzes und die Richtigkeit des sogleich zu besprechenden Reynoldsschen zu bestätigen.

Osborne Reynolds[3]) ging von viel tiefer begründeten theoretischen Anschauungen aus. Nach seiner Auffassung sind es im wesentlichen die Stokesschen hydrodynamischen Grundgleichungen, die auch den hydraulischen Zustand bestimmen; nicht eine Veränderung des ursprünglichen Widerstandsgesetzes bewirkt den Eintritt des veränderten Zustandes; vielmehr bleibt dieses das nämliche lineare Stokessche Gesetz, also auch die Laminarbewegung eine mögliche Strömungsform in allen Fällen; beim Ueberschreiten der kritischen Durchflußmenge werde diese nur labil und mache daher einer anderen, unregelmäßigen Strömungsform Platz. Hiernach kann die kritische Durchflußgeschwindigkeit nur von den in den Stokesschen Gleichungen vorkommenden Größen μ, der Zähigkeitskonstanten und ϱ, der Dichte sowie von den Dimensionen des Rohres, Radius a und Rohrlänge l, abhängen. Von letzterer betrachtet Reynolds den Strömungszustand als unabhängig bezw. er zieht nur sehr lange Röhren in Betracht. Die Geringfügigkeit der Abhängigkeit von der Länge hat später Couette experimentell bestätigt (l. c.[5]) S. 125). Dann muß das Gesetz für die kritische Geschwindigkeit, aus Dimensionsgründen, die Form haben

$$U_k = \Re \frac{\mu}{\varrho a},$$

wobei $\Re$, eine unbenannte Konstante, die kritische »Reynoldssche Zahl« genannt wird. U_k ist die mittlere Geschwindigkeit, nämlich Durchflußmenge : Querschnitt im kritischen Fall. Dieses Gesetz haben Reynolds' Versuche, die an Röhren verschiedener Weite (und mit verschiedenen Flüssigkeiten) durchgeführt wurden, bestätigt. Als numerischen Wert des kritischen $\Re$ fand Reynolds rund 1900. Für den Druckabfall erhielt Reynolds empirisch wieder die lineare Abhängigkeit von der Geschwindigkeit im Poiseuilleschen, dagegen ein Potenzgesetz mit einem Exponenten von annähernd 1,7 im hydraulischen Zustand. Nach anderen Versuchen (z. B. den älteren von Darcy)[4]) war der Exponent 1,9, also nahezu 2. Reynolds hatte aber mit bedeutend besser geglätteten Rohrwänden gearbeitet.

[1]) Vgl. Fußn. [6]) S. 125.

[2]) Vgl. Brillouin: Leçons sur la viscosité, Livre II, No. 170 ff.

[3]) O. Reynolds: An experimental investigation of the circumstances .... Phil. Trans CCXXIV part. III, p 935 (1883), Papers vol. II, p. 51.

[4]) Mémoires des Savants Étrangers, t. XV, p. 857 sowie Recherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau, Paris 1855.

Couette (l. c.[5]) S. 125) untersuchte die nach ihm benannte Anordnung: Strömung zwischen einem ruhenden und einem konzentrischen rotierenden Zylinder, und zwar mit verschiedenen Flüssigkeiten $\left(\text{Wasser: } \frac{\mu}{\varrho} = 0{,}011 \text{ und Oel: } \frac{\mu}{\varrho} = 0{,}15\right)$. Auch hier bestätigte sich das Reynoldssche Gesetz, mit der kritischen Zahl annähernd 2000, wenn hier unter a der Abstand der beiden Zylinder und unter U ihre relative Geschwindigkeit verstanden wird. L. Hopf[1]) hat ähnliche Resultate auch bei offenen Leitungen gefunden.

Eine wichtige Bestätigung und Erweiterung fanden die Reynoldsschen Experimentalergebnisse durch die Untersuchungen von E. Bose[2]) und W. Sorkau[3]). Beide untersuchten eine große Anzahl verschiedener Substanzen, z. B. Alkohole, Chloroform usw. beim Durchströmen durch Röhren. Sie bestätigen den scharf markierten Eintritt eines turbulenten Zustandes und ihre Zahlen stimmen gut mit dem Reynoldsschen Gesetz überein[4]). Sie finden aber auch, daß das Uebergangsgebiet vom laminaren zum hydraulischen Zustand, das Hagen fand, sich ebenfalls in mehrere, scharf getrennte Zustandsgebiete zerlegen läßt, die Sorkau als Turbulenz I, Turbulenz II usw. bezeichnet. Sie sind empirisch unterschieden durch den verschiedenen Exponenten des Potenzgesetzes, durch das die Abhängigkeit des Druckgefälles von der Durchströmungsmenge sich angenähert ausdrücken läßt. Diese Exponenten sind für die Turbulenzzustände I: 1,5, II: 2,3, III: 2,1. II und III scheinen bereits dem hydraulischen Zustand ähnlich.

2. Berücksichtigung der Wandbeschaffenheit. Bei den bisher erwähnten Versuchen wurde die Abhängigkeit der Turbulenzerscheinung vom Material der Wände nicht in Betracht gezogen, insofern jeder der Genannten nur mit einheitlichen, gut geglätteten Röhren bezw. Zylinderwänden arbeitete (Hagen und Couette mit Metall, Reynolds, Bose-Sorkau mit Glas). Auf Grund von Reynolds' theoretischen Anschauungen hatte sich zunächst die Ansicht gebildet, daß der numerische Wert der kritischen Reynoldsschen Zahl vom Material unabhängig, durch die Stokesschen Gleichungen allein bestimmt sei. Die späteren Erfahrungen entsprachen dieser Ansicht nicht mehr. Zunächst ist die Untersuchung von W. Ruckes[5]) über die Turbulenzerscheinungen bei Luftströmung durch Glas- und Metallkapillaren zu nennen. Ruckes bestätigt bei den Glaskapillaren den Reynoldsschen Wert $\mathfrak{R}_k$ rund 2000, dagegen findet er bei Metallkapillaren nur $\mathfrak{R}_k$ rund 400 bis 500.

In der entgegengesetzten Richtung findet V. W. Ekman[6]) Abweichungen von den Reynoldsschen Zahlen, ebenso wie früher schon Mallock[7]) bei Versuchen, deren Zuverlässigkeit wegen sonstiger Unstimmigkeiten allerdings zweifelhaft erscheint, bemerkt hatte. Auch Barnes und Coker[8]) hatten schon Laminarströmungen oberhalb der Reynoldsschen kritischen Zahl beobachtet.

Ekman arbeitete mit dem Reynoldsschen Apparat, aber mit sorgfältiger bearbeiteten Glasröhren, und insbesondere bei sorgfältiger Herstellung glatter Einströmungsverhältnisse. Das Ergebnis war, daß die kritische Grenze nicht eine bestimmte Zahl ist, wie Reynolds glaubte. Der Eintritt der turbulenten Strömung erfolgt vielmehr bei um so höheren Zahlen, je kleiner die Ursachen von Störungen des laminaren Zustandes sind, ja, es konnte bis zum 4fachen Wert der von Reynolds angegebenen kritischen Zahl die laminare Strömung aufrecht erhalten werden. Kleine Fehler im Ansatz des Einströmungsstückes, die offenbar Wirbel erzeugten, setzten die Grenze sofort wieder herunter. Daß aber turbulente Bewegung oberhalb der Reynoldsschen Grenze tatsächlich möglich ist, geht daraus hervor, daß, wenn der turbulente Zustand einmal erreicht ist, bei Verringerung der Geschwindigkeit nicht wieder der laminare Zustand eintritt, sondern der

[1]) Turbulenz bei einem Fluß, Ann. d. Physik 32. 1910, p. 777 sowie Diss. München 1909.

[2]) E. Bose — D. Rauert: Experim. Beitrag zur turbulenten Flüssigkeitsbewegung. Phys. Ztschr. 10 (1909); — Experimentelle Untersuchung über die innere Reibung im turbulenten Strömungszustande: Phys. Ztschr. 12 (1911) S. 582; 15 (1914) S. 582, 768.

[3]) Phys. Ztschr. 13, (1912) S. 805; 14, (1913) S. 147.

[4]) Vergl. Th. v. Karman: Phys. Ztschr. 12 (1911) S. 283 und G. Mie: Phys. Ztschr. 14 (1913) S. 93 sowie C. Schäfer — Frankenberg, ebenda S. 89.

[5]) Untersuchungen über den Ausfluß komprimierter Luft aus Kapillaren und die dabei auftretenden Turbulenzerscheinungen. Diss. Würzburg 1907. S. auch den Vortrag von W. Wien: Ueber turbulente Bewegungen; Phys. Ztschr. 8 (1904)) Verh. d. d. Phys. Ges. 9 (1907).

[6]) Turbulent Motions of Liquids: Archiv f. Mat. Astr. och Fysik, Bd. 6, No. 12 (1910).

[7]) Experiments on Fluid Viscosity, Phil. Trans, 187 (1896).

[8]) The flow of water through pipes, Proc. Roy. Soc. of London, t. LXXIV, p. 341 (1904/5).

turbulente bestehen bleibt. Nur in der Nähe der Reynoldsschen Grenze tritt dann, wie Reynolds beobachtet hatte, Laminarströmung ein. Hiernach scheint die Reynoldssche Zahl 2000 eine untere Grenze für die Möglichkeit turbulenter Strömung zu sein, die allerdings, nach den Versuchen von Ruckes, noch vom Material der Röhren abhängen müßte.

Neuerdings hat auch L. Schiller[1]) die Ergebnisse von Ekman bestätigt, wonach wesentlich durch günstige Einströmungsverhältnisse der Eintritt des turbulenten Zustandes zu viel höheren Durchflußgeschwindigkeiten verschoben werden kann. Es gelingt ihm, die Laminarbewegung bis $\Re = 9600$ aufrecht zu erhalten, während er $\Re = 1400$ als die erwähnte untere Grenze turbulenter Strömung feststellt Daß sie tiefer liegt, als die Reynoldssche kritische Zahl 1900, stimmt vielleicht, da die Versuche mit Metallröhren ausgeführt sind, mit den obigen Bemerkungen über die Abnahme der kritischen Zahl mit zunehmender Wandrauhigkeit überein. Immerhin bleibt noch eine bedeutende Differenz gegen die von Ruckes gefundene untere Grenze 400 aufzuklären, über die erst nach dem Vorliegen genauerer Mitteilungen über die Versuche geurteilt werden kann.

Als einen Widerspruch gegen die Annahme einer Abhängigkeit der kritischen Zahl von der Rauhigkeit sieht Schiller die Feststellung an, daß durch Einschneiden eines Gewindes (von 0,3 mm Tiefe bei einem Rohrdurchmesser von 16 mm) der Eintritt der Turbulenz nicht beeinflußt, wohl aber der Widerstand im turbulenten Zustand erhöht wurde.

II. Theoretische Untersuchungen.

Bereits Reynolds selbst hat sich nicht auf experimentelle Feststellungen der Turbulenzerscheinungen beschränkt, sondern sie — auf Grund der Stokesschen hydrodynamischen Grundgesetze — zu verstehen gesucht. Seiner Untersuchung ist eine größere Zahl weiterer gefolgt; verwandte Ueberlegungen von Rayleigh gehen den Reynoldsschen bereits voraus. Es muß aber gleich betont werden, daß eine vollständige Erklärung bisher nicht erreicht ist. Wir unterscheiden im folgenden drei Gruppen von Untersuchungen:

1. Die auf der Methode der kleinen Schwingungen (Zerlegung in Partialstörungen) beruhenden, die im wesentlichen als abgeschlossen betrachtet werden können, aber zu keinem Ergebnis hinsichtlich der Entstehung der Turbulenz geführt haben.
2. Die nur energetischen Ansätze, die noch nicht abgeschlossen sind, in ihrer Fortführung aber auf Ansätze nach Gruppe 3 hinweisen.
3. Die Ansätze, die endliche Störungen der Laminarströmung in Betracht ziehen wollen. Der Schwierigkeit der Aufgabe entsprechend sind diese Ansätze noch sehr unvollkommen.

1. Methode der kleinen Schwingungen. Ich beschränke mich, soweit formelmäßige Angaben in Betracht kommen, stets auf den zweidimensionalen Fall, der auch von den meisten Autoren bevorzugt ist. Die Uebertragung der Ansätze auf den dreidimensionalen Fall erfolgt ohne Schwierigkeit, die Durchführungen werden dann allerdings erheblich schwieriger. Die Strömung hat den Stokesschen hydrodynamischen Grundgleichungen[2]) zu genügen:

$$\left.\begin{aligned}\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\ \varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)&=Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(2),$$

wobei die Richtung x in die Stromrichtung, die Richtung y quer dazu fallen soll. Die Randbedingungen bestehen darin, daß die Flüssigkeit an den Wänden haften ($u = v = 0$) bezw. die Geschwindigkeit der Wände annehmen ($u = U$, $v = 0$) soll. Der laminaren Strömung entspricht die Lösung

$$u = U_0(y);\quad v = 0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(3).$$

[1]) L. Schiller: Rauhigkeit und kritische Zahl. Ein experimenteller Beitrag zum Turbulenzproblem. Ztschr. f. Physik III (1920), S. 412.

[2]) Stokes, l. c. S. 125[3]). S. auch Lamb: Hydrodynamics, Kap. XI.

Im Reynoldsschen Fall fester Röhren ist U_0 eine quadratische Funktion von y, im Couetteschen Fall bewegter Wände eine lineare.

Wegen der Gl. (2) führt man die Stromfunktion f ein:

$$u = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \dots\dots\dots \quad (4),$$

eliminiert p und führt geeignete Maßeinheiten ein (etwa als Längendimension die Rohrweite, als Zeitdimension diejenige Zeit, die ein mit der mittleren Geschwindigkeit bewegter Punkt zur Durchquerung der Rohrweite brauchte. Man erhält dann:

$$\varrho\, a\, U\left[\frac{\partial \Delta f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \Delta f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \Delta f}{\partial y}\right] = \mu\, \Delta \Delta f + \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \dots \quad (5),$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Man sieht, daß hier nur die »Reynoldssche« Zahl $\Re = \varrho\, a \frac{U}{\mu}$ als wesentliche Konstante eingeht[1]). Die Methode der kleinen Schwingungen setzt nun (im genannten Maßsystem):

$$u = U_0 + u_1; \quad v = v_1; \quad f = f_0(y) + f_1,$$

worin f_0 gegeben ist durch $U_0 = \frac{d f_0}{d y}$ und erhält, unter Beibehaltung nur linearer Glieder in f:

$$\varrho a U\left[\frac{\partial \Delta f_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x} - U_0'' \frac{\partial f_1}{\partial x}\right] = \mu \Delta \Delta f_1 \quad \dots\dots \quad (6),$$

wozu nach (3) und (4) die Randbedingungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

an beiden Rändern kommen. Eine beliebig vorgegebene Anfangsstörung denkt man sich nun in Fourierscher Weise in Einzelstörungen aufgelöst, die periodisch in der x-Richtung sind und fragt nach deren zeitlichem Verlauf; setzt also:

$$f_1 = e^{i(\alpha x - \beta t)}\, \varphi(y).$$

So wird:

$$\varrho U a i\left[(\alpha U_0 - \beta)\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \alpha^2 \varphi\right) - \alpha U_0'' \varphi\right] = \mu\left[\frac{d^4\varphi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \alpha^4 \varphi\right] \quad (6')$$

und statt (7) kommen die Randbedingungen:

$$\varphi = \frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (7')$$

an beiden Wänden. Die Frage ist, welche Werte β annimmt, bei beliebigen reellen Werten von α. Labilität der Strömung wäre erwiesen, wenn sich positiv imaginäre β (aperiodische Zunahme) oder komplexe β mit positiv imaginärem Teil (anwachsende Schwingungen) ergäben. In ähnlicher Form scheint der Ansatz der freien Schwingungen erstmals von Rayleigh[2]) gemacht zu sein. Rayleigh wählt für $U(y)$, die Verteilung der laminaren, reibenden Strömung in Röhren (U_0 quadratische Funktion in y) und zeigt, daß diese Strömung für kleine Werte von U sicher stabil ist.

Dieser Behandlung gehen eine Reihe verwandter Untersuchungen des nämlichen Verfassers[3]) voraus, die sich aber mit dem reibungsfreien Problem ($\mu = 0$) beschäftigen und daher nur eine der beiden Randbedingungen (7′) berücksichtigen können. Sie können also nicht als eine Annäherung der vorliegenden Aufgabe betrachtet werden, vor allem

---

[1]) S. z. B. A. Sommerfeld: l. c. S. 131[1]), S. 118. F. Noether: l. c S. 134[1]), S 315.

[2]) On the question of the stability of the flow of fluids. Phil. Mag (5, 34) (1892); (Papers III p 575); vergl. auch A. E. H. Love: Enzyklöp"die d math. Wi:sensch IV, 15 (Hydrodynamik I) Nr 18.

[3]) Lord Rayleigh: Proc. London Math Soc X (1878) p. 4 (Papers I, p 36); ebenda: XI (1880) p 57 (Papers I, p. 484); ebenda XXVII (1895) (Papers IV, p. 209). S. auch: Lord Kelvin, Brit Assoc. Rep. 1880, p. 492; (Papers IV, p. 186). Love: Proc London Math. Soc. XXVII, 1896, p. 202 Eine kritische Zusammenfassung dieser Untersuchungen findet sich bei William M Fadden Orr: The stability or Instability of the Steady Motion of a Perfect Liquid and of Viscous Liquid: (Proc. of the Royal Irish Academy, XXVII (A) 1907), Part I, p. 9 ff; Part II, p. 69 ff, insbesondere Part I.

deshalb, weil es immer Schichten gibt, in denen der Faktor $(\alpha U_0 - \beta)$ der zweiten Differentialquotienten auf der linken Seite von (6') verschwindet und daher in diesen Schichten, wie auch an den Wänden, die rechte Seite, auch bei noch so kleinem μ, maßgebend wird. Das wesentlichste Ergebnis dieser Untersuchungen war, daß die reibungsfreie Laminarströmung bei stetiger Strömungsverteilung immer stabil sei, bei unstetiger aber labil sein könne. Aus oben angeführten Gründen kommt diesen Resultaten nur beschränkte Bedeutung zu.

Den Einfluß der Reibung hatte, insoweit die Methode der kleinen Schwingungen (linearer Ansatz) in Betracht kommt, als erster schon Kelvin [1]) berücksichtigt, und zwar sowohl für den Couetteschen Fall, als auch für den Fall der Strömung in Röhren. Er kommt zu dem Schluß, daß in diesen Fällen die Laminarströmung immer stabil sei, doch scheint seine Schlußweise nicht einwandfrei [2]). Kelvin geht nicht von dem obigen Ansatz (in bezug auf die Querrichtung) stehender Wellen aus, sondern von einer willkürlichen, durch Fourierzerlegung dargestellten Anfangsstörung, die die Randbedingungen erfüllt, und fragt nach deren zeitlichem Verlauf. Er setzt eine zeitlich abklingende Lösung an, die aber die Randbedingungen nicht mehr befriedigt, daher durch Zufügung »erzwungener« Störungen ergänzt werden muß. Kelvin glaubt nun auf Grund einer Fourierzerlegung nach der Zeit und Abzählung der Bedingungen, diese Zusatzglieder immer, und zwar als abklingende, finden zu können. Dabei wird er auch schon auf die Gl. (6), ergänzt noch durch ein zeitlich rein periodisches Störungsglied, geführt. Hier aber scheint ein Trugschluß unterlaufen zu sein. Wenn z. B. der Grenzfall zwischen Stabilität und Labilität vorliegt, in dem die Gl. (6) zeitlich rein periodische freie Schwingungen hat, kann bekanntlich die erzwungene Schwingung von dieser Periode nicht existieren, die Kelvinsche Aufgabe wäre dann nicht lösbar. Die Stabilität des Strömungszustandes, die bewiesen werden soll, ist also bei Kelvin im Grunde schon vorausgesetzt.

Oseen hat später den Kelvinschen Ansatz wieder, in exakterer Form, aufgenommen, und zwar für den für die Stabilität wohl ungünstigsten Fall unendlich großer Reynoldsscher Zahl, die aber Oseen nicht wie Rayleigh (l. c. S. 129 [3])) durch Vernachlässigung der Reibung, sondern durch unendliche Verbreiterung des Kanals erhält. Die oben geäußerten Bedenken über die Anwendbarkeit dieses Falles als Näherung kommen daher hier nicht in Frage. Eine die Randbedingungen (Verschwinden im Unendlichen) anfangs erfüllende Störung erfüllt sie nun dauernd und so ergibt sich durch Nachweis des Abklingens jeder Störung der Nachweis der Stabilität, ohne daß noch erzwungene Schwingungen zu untersuchen wären. Gewisse Stetigkeitsbedingungen — für die Anfangsstörung — die hydrodynamisch kaum zu begründen sind, sind allerdings noch vorausgesetzt [3]).

Den Rayleighschen Ansatz (6) für die kleinen Schwingungen hat zuerst W. M. F. Orr [4]) ausführlich weiterbehandelt. Und zwar legt er den Fall linearer Verteilung der Grundströmung (Couettescher Fall mit Vernachlässigung der Zylinderkrümmung, $U_0'' = 0$) zugrunde. Ersichtlich ist dann die Gleichung (5) bezw. (6) eine Gleichung nur 2. Ordnung für die Größe

$$\psi = \frac{d^2\varphi}{dy^2} - \alpha^2\varphi,$$

nämlich:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - \alpha^2\psi = i\Re(\alpha y - \beta)\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

und statt (7') ergeben sich die Randbedingungen

$$\int \psi e^{\alpha y}\,dy = \int \psi e^{-\alpha y}\,dy = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9),$$

worin die Integrale über die Breite des Kanals zu erstrecken sind. Die Gleichung (8) selbst läßt sich durch Einführung einer mit y linear verbundenen Hilfsvariabeln auf die

[1]) Kelvin: Rectilineal motion of viscous fluid, Phil. Mag. (5), August und September 1887 Papers IV, p. 321). Auch über diese und anschließende Untersuchungen gibt die S. 129 unter [3]) zitierte Arbeit von W. Orr (Part II) einen vorzüglichen Bericht (p. 80 ff.).

[2]) Vergl. die Kritik bei Rayleigh, l. c. S. 129 [2]) und Orr, l. c. S. 129 [3]).

[3]) Ueber das Stabilitätsproblem in der Hydrodynamik: Archiv f. Mat. Ast. och Fysik 7 (1911), No. 15. Oseen (p. 9) setzt Differenzierbarkeit der Wirbelkomponenten voraus, d. h. zweimalige Differenzierbarkeit der Geschwindigkeitskomponenten. Hydrodynamisch kann wohl nur Endlichkeit der Wirbelkomponenten verlangt werden.

[4]) l. c. S. 129 [3]) Part II, p. 95 ff., p. 117 ff.

der Besselschen Funktionen vom Index $^1/_3$ zurückführen. Als Gleichung, die die möglichen Werte von β liefert und damit nach obigem über die Stabilität entscheidet, ergibt sich hieraus eine transcendente Gleichung, die Integrale über Besselsche Funktionen enthält. Den besprochenen Ansatz von Orr, der in Deutschland unbekannt geblieben ist, hat A. Sommerfeld[1]) später unabhängig neu mitgeteilt.

Die Diskussion der transzendenten Gleichung zur Bestimmung der β-Werte hat bereits Orr[2]) durch Benutzung asymptotischer Formeln für die Zylinderfunktionen begonnen und ist zu der Vermutung gekommen, daß nur abklingende Schwingungen existieren, ohne sie streng zu begründen. L. Hopf[3]) hat auf ähnlichem Wege, im Anschluß an die Sommerfeldsche Arbeit, diesen Beweis streng durchgeführt und zugleich eine ausführliche Untersuchung der Schwingungstypen angeschlossen. Bei kleinen Werten von $\mathfrak{R}$ überwiegen Wellen, ähnlich denen auf ruhendem Wasser, die die Kanalbreite in mehrere zirkulierende Gebiete unterteilen und sich mit einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit fortpflanzen. Bei großem $\mathfrak{R}$ überwiegen Störungen, die sich vorzugsweise je auf eine kleine Schicht der Kanalbreite beschränken und mit der dort herrschenden lokalen Geschwindigkeit fortpflanzen. Auf einem direkteren Weg hatte vorher auch schon R. v. Mises[4]) den Stabilitätsbeweis für beliebiges $\mathfrak{R}$ geführt. Nach Rayleighs zitierter Untersuchung war die Stabilität für kleine $\mathfrak{R}$ sichergestellt. Mises fragt daher direkt nach der Grenze, für die die Stabilität in Labilität übergehen könnte, für die es also rein periodische Störungswellen (β reell) geben müßte. Die Forderung, (8), (9) bei reellem β zu lösen, ist ein Eigenwertproblem, das zu einer transzendenten Gleichung für $\lambda = i\mathfrak{R}$ führt. Mises stellt sie direkt durch Potenzentwicklung in der Art einer Fredholmschen Entwicklung auf, deren Form er durch den Grenzübergang aus der betreffenden Differenzenaufgabe zur Differentialaufgabe gewinnt. Man erkennt durch gewisse Ueberlegungen, daß die Gleichung unendlich viele reelle Wurzeln λ hat und der Grenzübergang gestattet zugleich die Abzählung, daß diese ihre sämtlichen Wurzeln sind. Daraus folgt, daß es keine reellen »kritischen« Reynoldsschen Zahlen $\mathfrak{R}$ gibt, also stets nur gedämpfte Partialschwingungen vorhanden sind.

Diese Untersuchungen sind noch ergänzt durch den von O. Haupt geführten Nachweis, daß mit ihnen der Fall einer beliebig vorgegebenen Anfangsstörung erledigt wird. Zu dem Zweck war der formelle Nachweis nötig, daß eine willkürlich vorgegebene Funktion von y, die die Randbedingungen (7) erfüllt, sich nach den durch die homogene Aufgabe (8), (9), bei festem $\mathfrak{R}$ definierten Funktionen entwickeln läßt. Dieser Entwicklungssatz ist allerdings von Haupt auch nur unter Voraussetzung gewisser Stetigkeitsbedingungen erbracht worden, die, ähnlich den oben von Oseen vorausgesetzten, nicht hydrodynamisch begründet sind. Nach Analogie der über Fouriersche Reihen seit langem vorliegenden Resultate dürfte aber die Entwickelbarkeit nicht auf die so eingeschränkte Funktionenklasse beschränkt sein, wohl aber die absolute Konvergenz der Entwicklung. Hierauf werden wir unten noch eingehen[5]).

Hiermit hat diese Gruppe von Untersuchungen einen gewissen Abschluß erreicht Mit einem nachher noch zu erwähnenden Vorbehalt kann man sagen, daß sie die Stabilität der Laminarbewegung, soweit man sie durch den linearen Ansatz feststellen kann, beweisen. Es liegt hiernach theoretisch keine Labilität in dem Sinn vor, wie sie z. B. bei einem in der Längsrichtung belasteten Balken besteht, der, ohne Berücksichtigung anderer Umstände, oberhalb der »Knickgrenze« sich bekanntlich theoretisch und empirisch als labil erweist.

2. Energetische Ansätze. Osborne Reynolds[6]), der Begründer der Turbulenztheorie, hat die Stabilitätsfrage enger gefaßt, als der im vorausgehenden Abschnitt be-

[1]) Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung: Atti del IV. congr. intern. dei Matematici, Roma, 1908.

[2]) l. c. p. 119 ff.

[3]) Der Verlauf kleiner Schwingungen auf einer Strömung reibender Flüssigkeit; Ann. d. Physik, 43 (1914).

[4]) Beitrag zum Oszillationsproblem: Heinrich-Weber-Festschrift, 1912, S. 252: vergl. auch: Kleine Schwingungen und Turbulenz; Jahresber. d. deutschen Math. Ver., XXI, 1912, p. 241.

[5]) Ueber die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems; Sitzungsber. d. K. bayr. Akademie d. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1912, S. 289. Haupt fordert 3 mal stetige Differenzierbarkeit der Geschwindigkeit der Anfangsstörung (l. c., S. 300) oder eine gleichwertige Bedingung: Hydrodynamisch läßt sich nur 1 mal stetige Differenzierbarkeit begründen.

[6]) l. c. S. 126[3]) und Phil. Trans. A 186, Part I 1895 (Papers II, p. 535): On the dynamical theory of incompressible Viscous Fluids and the determination of the criterion.

sprochene Rayleighsche Ansatz der kleinen Schwingungen. Wenn wir ihn trotzdem, nachdem der letztere bereits zu einem negativen Resultat geführt hat, noch erwähnen müssen, so ist es deshalb, weil er doch auf Fälle hinweisen kann, in denen die Neigung zur Labilität bei dem Rayleighschen Ansatz der Zerlegung in Partialschwingungen verdeckt bleiben würde. Reynolds betrachtet eine vorgegebene »mittlere Strömung«, der Störungsbewegungen überlagert sind. Die mittlere Bewegung ist definiert als laminare Strömung, während der zeitliche Mittelwert der Störungsbewegung verschwinden soll [1]). Er fragt, ob die Energie der in einem beliebigen Zeitpunkt vorgegebenen Störung mit der Zeit anwächst oder abnimmt. Setzt man in unseren Grundgleichungen (1)

$$u = U_0 + u_1, \quad v = v_1,$$

wobei U_0 die mittlere Bewegung (zu unterscheiden von der früheren »Grundbewegung«) und u_1, v_1 die Störungsbewegung bedeuten, so ist die Energiezunahme der Störungsbewegung:

$$\frac{dT}{dt} = -\mu \int \Phi_1 \, dw - \mu \, \Re \int \Psi_1 \, dw,$$

worin

$$\Phi_1 = 2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2$$

die Dissipationsfunktion, ferner

$$\Psi_1 = u_1 v_1 \frac{\partial U_0}{\partial y}$$

bedeutet und die Integrale über den ganzen Flüssigkeitsraum zu erstrecken sind. Wenn die Störung so gewählt werden kann, daß Ψ_1 negativ wird, so muß bei hinreichend großer Reynoldsscher Zahl $\Re$ das zweite Integral das erste überwiegen, die Energie der Störung also zunehmen. Reynolds hat spezielle Störungsformen untersucht, für die diese Grenze sich zu $\Re = 517$ ergab; H. A. Lorentz [2]) hat (für den Couetteschen Fall) durch andere Wahl der Störung $\Re = 288$ gefunden. Sharpe [3]) hat die Grenze auf 167 herabgesetzt. W. M. F. Orr [4]) formuliert die Aufgabe als ein Variationsproblem, (das Verhältnis des Integrals über Ψ_1 zu dem über Φ_1 möglichst groß zu machen), das auf die Randwertaufgabe führt:

$$\Delta \Delta \psi + \Re \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \, \partial y} = 0$$

bei den Randbedingungen

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

und findet so den numerischen Wert $\Re = 177$ durch Ansatz spezieller Lösungsformen, die aber noch nicht den kleinstmöglichen Wert ergeben.

G. Hamel [5]) hat das nämliche Variationsproblem in mathematisch schärferer Form und auch für den Fall der Strömung in Röhren begründet. Durch Zurückführung auf eine Integralgleichung zeigt er zugleich, daß es immer eine von 0 verschiedene »kritische« Reynoldssche Zahl in diesem Sinne gibt.

Haben nun diese Betrachtungen weitergehende Bedeutung als die vorausgehend besprochene Zerlegung in (kleine) Partialschwingungen? Soweit sie an die dortigen Voraussetzungen (kleine Anfangsstörungen mit weitgehenden Stetigkeitsbedingungen) gebunden bleiben, sicher nicht. Die energetischen Betrachtungen fragen nämlich nur nach dem anfänglichen Anwachsen oder Abnehmen der Turbulenzenergie. Das in Frage stehende System ist aber kein »abgeschlossenes«: bei einem solchen ließe sich die Gesamtenergie als Summe der Teilenergieen berechnen, die, einzeln angeregt, den Partialschwingungen entsprächen, und wenn diese gedämpft sind, also ständig abnehmende Energie haben, muß auch die Gesamtenergie aperiodisch abnehmen. Es ist vielmehr nur dem einen Freiheitsgrad eines gekoppelten Systems vergleichbar, dessen anderer Freiheitsgrad die laminare Haupt-

---

[1]) Vergl. auch H. Lamb: Hydrodynamics, § 346 (deutsche Ausgabe von Friedel, S. 743).

[2]) Turbulente Flüssigkeitsbewegungen . . .; Abh. über theor. Physik (1907), S. 54 (Neubearbeitung einer Arbeit aus dem Zittingsverslag Akad. v. Wet. Amsterdam 6 (1897), S. 28.

[3]) Sharpe: On the stability of the motion of a viscous liquid: Trans. Amer. Math. Soc. VI, 4 (1905)

[4]) l. c. S. 129 [3]), S. 124 f.

[5]) Zum Turbulenzproblem: Nachr. d. Ges. d. Wiss Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1911.

bewegung wäre. Daher kann seine Energie zeitweise zunehmen, ohne daß damit Labilität verbunden wäre, die Energie kann selbst gedämpfte Schwingungen ausführen. Die energetischen Methoden ergeben deshalb höchstens eine untere Grenze für die kritische Reynoldssche Zahl.

Andererseits kann das zeitweise Anwachsen der Energie für die Stabilitätsfrage doch wesentlich in Betracht kommen. Entsprechend dem Anwachsen der Energie muß hier, wenigstens zeitweise, trotz der gesicherten Stabilität der Partialschwingungen, mit einem starken Anwachsen der Turbulenzamplitude gerechnet werden. (Solche Fälle treten z. B. bei einem Freiheitsgrad eines gekoppelten Systems immer auf, wenn »Schwebungserscheinungen« vorliegen.) Dadurch können aber leicht die Voraussetzungen des linearen Ansatzes, der in der Methode der Partialschwingungen und auch in der Kelvin-Oseenschen Methode enthalten ist, über den Haufen geworfen werden. Denn wir haben es, wenn auch mit kleinen, doch stets mit endlichen Störungen zu tun. Hierin liegt die Bedeutung der energetischen Ansätze: Sie können, trotz der gesicherten Stabilität der Partialschwingungen, auf Fälle hinweisen, wo die Voraussetzungen des linearen Ansatzes hinfällig werden. So drängen diese Betrachtungen dazu, die Stabilitätsfrage nicht auf unendlich kleine Störungen zu beschränken, sondern endliche Störungen ins Auge zu fassen[1]).

3. Endliche Störungen. Bereits Lord Kelvin hat aus seinen (allerdings als unstreng nachgewiesenen, s. oben) Untersuchungen den Schluß gezogen, daß nicht unendlich kleine, sondern nur endliche Störungen die Laminarbewegung in die turbulente umwandeln können. Die Größe der erforderlichen Störung könne vielleicht um so kleiner werden, je größer die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R}$ ist. Eine ähnliche Auffassung kommt auch bei Reynolds und Rayleigh[2]) vor, ebenso in der oft zitierten Arbeit von Orr und bei Oseen (l. c. S. 130[3])). Man unterscheidet bekanntlich Fälle theoretischer Stabilität bezw. Labilität im Gegensatz zu praktischer Stabilität bezw. Labilität[3]) und versteht unter ersterer Klasse das Verhalten des mechanischen Systems gegenüber beliebig zu verkleinernden Störungen, unter letzterer Klasse das Verhalten gegenüber den praktisch vorkommenden,

[1]) Aehnliche Ausführungen finden sich mehrfach in der zitierten Arbeit von Orr, II, p. 16, p. 30, p. 32 f, p. 74. Vergl. auch die kritischen Bemerkungen in der voranstehenden Note von G. Hamel sowie Derselbe: Stabilität und Partikularlösungen linearer Differentialgleichungen, Monatshefte f. Mathematik und Physik, XXIII, 1912, S. 312.

Der mathematische Gedanke unserer textlichen Ausführungen ist wesentlich folgender: Die Eigenfunktionen des Turbulenzproblems, $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \ldots$ bilden kein Orthogonalsystem, da die Aufgabe (8), (9) keine selbstadjungierte ist. Daher ist auch das quadratische Integral $\int f^2(y)\,dy$ einer Funktion $f(y)$, die nach diesen Eigenfunktionen entwickelt ist

$$f(y) = A_1 \varphi_1(y) + A_2 \varphi_2(y) + \ldots \qquad (\alpha)$$

nicht durch die Quadratsumme der Koeffizienten, $A_1^2 + A_2^2, \ldots$ darstellbar.

$$\int f^2(y)\,dy \neq A_1^2 + A_2^2 + \ldots \qquad (\beta).$$

Wenn eine willkürliche Anfangsstörung gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt (vergl. Haupt, l. c. S. 131[5])), so läßt sie sich in eine absolut konvergente Reihe der Form (α) entwickeln. Sind aber diese hydrodynamisch nicht begründeten Stetigkeitsbedingungen nicht erfüllt, so muß man nach Analogie der über Fouriersche Reihen vorliegenden Resultate annehmen, daß die Reihe auch existiert, aber nur bedingt konvergent ist. Es sei für $t = 0$ die Reihe (α) eine solche bedingt konvergente Reihe. Nehmen wir einen Augenblick an, alle Partialschwingungen seien zeitlich rein periodisch. Dann haben wir zur Zeit t:

$$f(y, t) = A_1 \cos \beta_1 t\, \varphi_1(y) + A_2 \cos \beta_2 t\, \varphi_2(y) + \ldots \qquad (\gamma).$$

Da nach Ungleichung (β) kein Anhalt über das quadratische Integral der Funktion $f(y, t)$, noch weniger über die Funktion $f(y, t)$ selbst besteht und (α) nur bedingt konvergent angenommen ist, ist es möglich, daß die Reihe (γ) für gewisse t divergent, $f(y, t)$ also unendlich wird. Im Turbulenzfall sind die Teilschwingungen allerdings sämtlich gedämpft, also

$$f(y, t) = A_1 e^{-\beta_1' t} \cos \beta_1 t\, \varphi_1(y) + A_2 e^{-\beta_2' t} \cos \beta_2 t\, \varphi_2(y) + \ldots \qquad (\delta)$$

und die $\beta_1', \beta_2' \ldots$ bilden eine mit dem Index anwachsende Reihe, so daß (δ) eine absolut konvergente Reihe ergibt, aber der relative Unterschied dieser Dämpfungskonstanten ist nicht erheblich (vergl. L. Hopf, l. c. S. 131[3]), S. 42). Man muß daher mit der Möglichkeit rechnen, daß $f(y, t)$, wenn nicht unendliche, so doch zum mindesten zeitweise sehr große Werte annimmt, trotz der Dämpfung der Partialschwingungen.

[2]) Ueber Stabilität der Laminarbewegung einer reibungsfreien Flüssigkeit, Phil. Mag. 16, 26 (1913) (p. 100).

[3]) Vergl. Klein-Sommerfeld: Ueber die Theorie des Kreisels (Heft II), Leipzig 1898, S. 350 ff.

immer endlichen, wenn auch kleinen Störungen. Nur die erstere Klasse kann die Methode der kleinen Schwingungen erfassen, sofern das »praktische« Verhalten abweicht von dem »theoretischen«. Ein einfachstes Beispiel bildet eine Kugel, die auf der Spitze eines Berges in einer kleinen Versenkung liegt. Um das praktische Verhalten der Kugel zu ermitteln, dürfte man offenbar sich nicht auf die lineare Annäherung beschränken, die die Gleichgewichtslage der Kugel immer als einen tiefsten Punkt ergäbe, sondern man muß die wahre Bergform einschließlich der Einsenkung berücksichtigen, also mindestens noch quadratische Glieder mitnehmen, und wird dann die Lage als eine nahezu höchste, also labile finden. Analoge Verhältnisse müssen überall in der Physik vorliegen, wo labile Zustände sich überhaupt erhalten lassen, z. B. bei überhitzten Flüssigkeiten oder unterkühlten Dämpfen. Daß ein solcher Fall bei der Turbulenzerscheinung vorliegt, ist durch die Ekmanschen Versuche (s. oben) und die späteren oben erwähnten sehr wahrscheinlich gemacht. Stellen wir uns die Aufgabe, die Turbulenzerscheinung aus den hydrodynamischen Gleichungen allein abzuleiten, so müssen wir also die bisher unterdrückten quadratischen Glieder dieser Gleichungen heranziehen. Die erwähnten Versuche scheinen zu zeigen: Bei unendlich kleinen Störungen ist die Laminarströmung immer stabil, in Uebereinstimmung mit den Resultaten der Methode der kleinen Schwingungen. Wenn aber durch größere Rauhigkeit der Wände größere Störungen vorkommen, oder durch ungeeignete Formen der Zuführung größere Wirbel erzeugt werden, so wird die Laminarströmung labil. Die Stabilität ist um so kleiner, je größer die Reynoldssche Zahl der Strömung ist. Es gibt aber keine bestimmte »kritische« Reynoldssche Zahl, sondern diese hängt ab von der Größe der vorkommenden Störung.

Diesen Standpunkt hat F. Noether[1]) eingenommen. Er geht aus von einer gleichfalls laminaren anfänglichen Geschwindigkeitsverteilung $U_0(y)$, die aber von der Verteilung der stationären Laminarbewegung endlich verschieden ist. Der nun folgende Strömungszustand kann eine nicht stationäre Laminarbewegung sein, vermittels derer die Geschwindigkeitsverteilung sich asymptotisch der stationären nähert. Wird diese nicht stationäre Laminarbewegung stabil sein? Die Frage läßt sich, mit Rücksicht auf die hohen Reynoldsschen Zahlen, die in Betracht kommen, dahin vereinfachen, daß man sich die ursprüngliche Laminarverteilung durch kleine Zusatzkräfte aufrechterhalten denkt und nun, genau analog dem obigen Ansatz der kleinen Schwingungen, nach der Stabilität dieser Strömung fragt. Es handelt sich also wieder um unsere obige Aufgabe (6), (7), worin nur für U_0 die gewählte Anfangsverteilung einzuführen ist. Man muß fragen, ob es nun eine Reynoldssche Zahl $\Re$ (diese wieder durch die mittlere Geschwindigkeit bezw. die relative Wandgeschwindigkeit definiert) gibt, bei der Stabilität in Labilität übergeht, also in der Bezeichnung von S. 129 β rein reell wäre. Das erste Beispiel, das F. Noether angibt ($U_0 = c\,y^3$ für die Couettesche Anordnung), für das dieser Fall möglich sein soll, wurde von O. Blumenthal[2]) als irrtümlich nachgewiesen. Doch fand F. Noether später für ein anderes Beispiel[3]), das als Nachbarfall einer unstetigen Verteilung gewonnen wird (konstante Geschwindigkeitsverteilung im Innern des Rohrs, konstante Geschwindigkeit gleich der Wandgeschwindigkeit in der Nähe der Wände), daß in der Tat der Uebergang zum labilen Zustand möglich ist. Ein bestimmter Wert der Reynoldsschen Zahl für diesen Uebergang ergibt sich hiernach noch nicht, da, der Einfachheit der Rechnung halber, noch unendliche Wellenlänge der Störung ($\alpha = 0$) angenommen ist und nur $\alpha\Re$ sich berechnen läßt.

Hiernach ist es möglich, solche laminare Strömungsverteilungen anzugeben (die im allgemeinen den Charakter der wirklich beobachteten, in der Mitte gleichförmigen, am Rande rasch abfallenden Verteilungen haben), die, wenn sie durch geeignete, kleine zusätzliche Reibungskräfte zwischen den einzelnen Schichten aufrechterhalten werden, die Ueberlagerung turbulenter Bewegungen ohne dauernde Anregung gestatten. Andererseits hat schon H. A. Lorentz[4]) gezeigt, daß solche zusätzlichen »Reibungskräfte« durch die mit der turbulenten Bewegung verbundene Konvektion von Impulsgröße von selbst entstehen (dem entspricht in unsrer obigen Darstellung des Reynoldsschen Ansatzes das energetische Glied W) Es liegt daher nahe, nach solchen Geschwindigkeitsverteilungen

[1]) Ueber die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung: Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1913, S. 309.

[2]) Ueber die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung: Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1913 S. 563.

[3]) Zur Theorie der Turbulenz: Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1917.

[4]) l. c. S. 132 [2]), § 11 f.

zu fragen, die durch die ihnen überlagerbaren turbulenten Strömungen von selbst aufrecht erhalten werden. Von einer Lösung dieser Frage sind wir noch weit entfernt. F. Noether[1]) formuliert die Aufgabe in der folgenden Gestalt: Es ist eine komplexe Funktion

$$\chi_1(y) = \varphi_1(y) + i\psi_1(y)$$

zu finden, die der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^4\chi_1}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\chi_1}{dy^2} + \alpha^4\chi_1 = \frac{i\alpha\Re}{2}\left[\left(\frac{2\beta}{\alpha} - U_0\right)\left(\frac{d^2\chi_1}{dy^2} - \alpha^2\chi_1\right) + \frac{d^2 U_0}{dy^2}\chi_1\right] \quad . \quad (10)$$

mit der Randbedingung

$$\chi_1 = \frac{d\chi_1}{dy} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10')$$

für $y = \pm {}^1/_2$. Die Aufrechterhaltung der Grundströmung fordert dabei die Bedingung: Es soll sein

$$\frac{dU_0}{dy} = \frac{\Re\alpha}{2}\left(\varphi_1\frac{d\psi_1}{dy} + \psi_1\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right) + Ay + B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

(mit gewissen Konstanten A, B, die die entsprechende stationäre Laminarbewegung bestimmen; α, β haben die frühere Bedeutung). Es wird gezeigt, daß ihre Lösung als erster Schritt einer sukzessiven Lösung der nicht linearen Differentialgleichung (5), mit den Randbedingungen (7), aufgefaßt werden kann, die nach negativen Potenzen von $\sqrt{\Re}$ fortschreitet. Daß solche Lösungen wirklich existieren, die nirgends mit der Laminarlösung zusammenfallen, wird durch die Verzweigungstheorie der nichtlinearen Differentialgleichungen nahegelegt (vergl. hierüber die zitierte Note) und kann mit den Sorkauschen Messungen (vergl. oben S. 127) in Verbindung gebracht werden, wonach es eine Reihe von verschiedenen turbulenten Zuständen gibt.

Bei dieser Auffassung der Vorgänge kommt der Rauhigkeit der Wände, Unregelmäßigkeiten der Einströmungsverhältnisse, mit der Strömung eingeführten Wirbeln eine auslösende Rolle zu, sowie eine auswählende: Die verfügbaren Konstanten der Lösungen dürften erst durch diese Umstände bedingt sein. Ob eine »kritische Zahl« vielleicht in dem Sinne existiert, daß unterhalb derselben eine von der Laminarlösung abweichende Lösung überhaupt nicht existiert, bleibt noch offen, sie müßte nach den Schillerschen Versuchen (l. c. S. 127) kleiner als 1400, nach denen von Ruckes (l. c. S. 128) sogar kleiner als 400 sein.

R. v. Mises[2]) vertritt eine etwas abweichende Auffassung. Nach seiner Ansicht hat die Turbulenz nicht den Charakter freier Schwingungen, sondern werde durch die Wandrauhigkeit dauernd erregt, auch wenn diese als unendlich klein betrachtet werden kann. Insofern auch bei unserer Auffassung die freien Schwingungen von der Strömung mitgenommen werden und an der Einströmung neu erregt werden müssen, weichen beide Auffassungen für ein Rohr von endlicher Länge nicht prinzipiell voneinander ab. Erst bei dem theoretischen, unendlich langen Rohr ergibt sich eine scharfe Fassung der Fragestellung: Gibt es dann im ideal glatten Rohr eine von der laminaren abweichende »turbulente« Strömungsform, die sich, einmal erregt, dauernd zu erhalten vermag, oder wird die »Turbulenz« mit der Zeit abklingen, wenn sie nicht durch andauernde Störungen immer neu erregt wird? Haben also die Störungen nur auslösenden, oder für die Möglichkeit der turbulenten Strömung wesentlichen, erregenden Charakter?[3]) Von sekundärer Bedeutung ist die Frage, ob die Wandrauhigkeit oder die Form der Einströmung die Störungen hervorbringt. L. Schiller (l. c.) entscheidet sich hier für die letztere Annahme, auf Grund seiner oben erwähnten Resultate, daß das Einschneiden eines Gewindes in die Rohrwand den Eintritt der Turbulenz nicht beeinflußte. Doch kann dieser Versuch kaum als beweisend betrachtet werden, da hier

---

[1]) Zur Theorie der Turbulenz: Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 23 (1614), S. 138.

[2]) Kleine Schwingungen und Turbulenz: Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 21, 1912, S. 241. Vergl. auch den Einführungsaufsatz dieser Zeitschrift, Bd. 1, 1921, S. 13.

[3]) Die Misessche Auffassung scheint mir, wenigstens unter Beschränkung auf den linearen Ansatz, kaum durchführbar. Die Auffassung der Turbulenz als freie Schwingungen im rauhen Rohr muß zu einem ähnlichen Ansatz führen wie der erzwungener Schwingungen im glatten Rohr, im Gegensatz zu den Ansätzen von Orr, Sommerfeld usw., die freie Schwingungen im glatten Rohr suchen. Es ist aber eine bekannte Tatsache, daß erzwungene Schwingungen nur dann großen Einfluß haben, wenn die entsprechenden freien vorhanden sind, mit denen sie in Resonanz treten können. Vielleicht können statistische Betrachtungen über die Schwierigkeit hinweghelfen, wenn man an eine ähnliche Wirkung der Superposition vieler Schwingungen denkt, wie wir sie in § 2 (S. 132) schon bei den energetischen Ansätzen als möglich hinstellten.

das wesentliche Charakteristikum der Rauhigkeit, die »molekulare Unordnung«, fehlt. Für die Auffassung der Turbulenz als freier Schwingungen spricht aber noch eine einfache Ueberlegung. Bei dieser Auffassung kann die Turbulenzenergie nur auf Kosten der Energie der laminaren Grundströmung entstehen. Ist nun die mittlere Strömungsgeschwindigkeit (Durchströmungsmenge) gegeben, so kann man fragen, bei welcher Verteilung der Grundströmung deren Energie möglichst klein ist. Man hat die Aufgabe zu lösen, das Integral

$$E = \int U^2(y)\, dy$$

möglichst klein zu machen, wenn

$$Q = \int U(y)\, dy$$

vorgegeben ist. Man findet ohne Schwierigkeit nicht die stationäre laminare Verteilung, sondern die gleichförmige Verteilung über den Querschnitt: $U = \frac{Q}{b}$. Es ist daher verständlich, daß die Entstehung dieser gleichförmigen Verteilung, die annähernd wirklich beobachtet wird, mit der Entstehung von Turbulenzenergie verbunden sein kann, die in freien Schwingungen zu Tage tritt. Die erhöhte Widerstandsarbeit ist auf die verstärkte Poiseuillesche Reibung am Rand zurückzuführen.

R. v. Mises[1]) hat ferner eine Abschätzung der erforderlichen Größe der Turbulenzbewegung mitgeteilt, die, im obigen Sinn, die beobachtete mittlere Strömungsverteilung aufrechterhalten kann. Sein Weg stimmt im Wesen mit unserer Gleichung (11) überein, in der das erste Glied auf der rechten Seite die Turbulenzreibung bezeichnet. Wegen der großen Werte von $\mathfrak{R}$, die in Betracht kommen, ist ersichtlich, daß sehr kleine φ, ψ ausreichen können, um an Stelle der stationär laminaren Verteilung die gänzlich veränderte mittlere Verteilung der hydraulischen Bewegung treten zu lassen. Mises berechnet in einem Beispiel für die Turbulenzgeschwindigkeit wenige Hundertstel der mittleren Geschwindigkeit.

Zusatz.

Einige Untersuchungen über verwandte Fragen. Von verwandten Untersuchungen wären vor allem Experimentalbestimmungen von Viskositätskoeffizienten zu nennen, auch der »scheinbaren« Koeffizienten im Gebiete turbulenter Strömung. Statt diese zahlreichen Untersuchungen im einzelnen zu besprechen, sei auf die Referate in den physikalischen Literaturberichten (Beiblätter zu den Annalen der Physik, Fortschritte der Physik) sowie für die älteren auf das eingangs zitierte Buch von Brillouin verwiesen. Eine weitere Gruppe befaßt sich mit dem Uebergang von »laminarer« zu turbulenter Strömung bei verwandten Versuchsanordnungen. Die besprochenen Fragen bezogen sich auf die Strömung im geraden Kreisrohr und die geradlinige zwischen parallelen Wänden, endlich die Kreisströmung zwischen koaxialen Zylindern (Couette). Andere Anordnungen, die untersucht wurden, sind die Strömung zwischen parallelen Platten, von denen die eine gleichförmig rotiert[2]), die Strömung zwischen konzentrischen Kugeln, deren eine gleichförmig rotiert[3]) und die Strömung im spiralförmig gewundenen Kreisrohr[4]). Die Verfasser finden in jedem Fall gleichfalls Uebergang von »laminarer« zu turbulenter Strömung, aber nicht, wie bei Reynolds, einen sprunghaften Uebergang, sondern stetige Entwicklung der turbulenten Strömungsform. Diese Erscheinung hat aber nichts mit den vorher besprochenen Abweichungen von den Reynoldsschen Beobachtungen zu tun, wie die Verfasser anzunehmen scheinen und z. B. Zemplén wirklich ausspricht. Bei der Reynoldsschen und Couetteschen Anordnung handelt es sich darum, daß die genau laminare Strömung immer möglich ist, aber bei größeren Geschwindigkeiten praktisch nicht eintritt. Anders liegen hier die Verhältnisse. Die »Laminarströ-

[1]) Elemente der Technischen Hydrodynamik (Leipzig 1914), Nr. 31.

[2]) H. Sanders: Untersuchungen über die Bewegungen einer zähen Flüssigkeit unter einer rotierenden Platte (Diss. Erlangen), Verh. d. deutschen Phys. Ges. 1912, S. 799.

[3]) Gg. Zemplén: Untersuchungen über die innere Reibung der Gase, Ann. d. Phys. 29 (1909), p. 869; Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 71. — Gg. Zemplén und B. Pogany: Ueber die innere Reibung von Flüssigkeiten, Ann. d Phys. 41 (1916), p. 39.

[4]) G. Lechner: Untersuchungen der Turbulenz bei Wasser und Quecksilber beim Fließen durch spiralförmig gewundene Kapillaren (Diss. Würzburg), Ann. d. Phys. 42 (1913), p. 614.

mung« ist hier eine nur für sehr kleine Geschwindigkeiten gültige Annäherung[1]), ähnlich wie die bekannte Stokessche Strömung um Kugeln[2]) bei kleinen Geschwindigkeiten. Führt man in jedem Falle eine durch die Dimensionen des Apparates und die physikalischen Konstanten definierte Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R}$ ein, so läßt sich der Strömungszustand bei Rücksicht auf die quadratischen Glieder darstellen durch eine Reihe[3]):

$$U = U_0 + U_1 |\mathfrak{R}| + U_2 \mathfrak{R}^2 + U_3 |\mathfrak{R}|^3 + \ldots,$$

die den stetigen Uebergang aus der Laminarströmung zur turbulenten vermittelt. Zempléns Annahme, daß die Turbulenzerscheinung bei Couette auf den Einfluß der Zylinderenden zurückzuführen sei, und bei der Kugelanordnung wegen des Fehlens der Enden verschwinde, ist nach dem Vorstehenden nicht begründet. Es bleibt aber auch in diesen Fällen bei höheren Geschwindigkeiten der unstetige Uebergang zu anderen Strömungsformen denkbar, wie er in der Aerodynamik mehrfach bekannt ist[4]).

Weiter sind Untersuchungen über die Strömung in konvergenten oder divergenten Röhren zu erwähnen. Damit beschäftigt sich Gibson in einer größeren Reihe von Arbeiten. Er bestimmt theoretisch durch entsprechende Näherung die »Laminarströmung« in solchen Kreisrohren, d. h. die Strömung, bei der die von der Spitze des Trichters ausstrahlenden Radien Strömungskurven sind[5]), bei kleinen Oeffnungswinkeln des Trichters. Bei seiner Näherung ergibt sich kein Unterschied zwischen Aus- und Einströmung durch den Trichter. Die nämlichen Strömungen untersucht er experimentell[6]) durch Messung des Strömungswiderstandes und findet das (auch aus technischen Untersuchungen bekannte) Resultat, daß der turbulente Zustand beim Ausströmen (nach der Trichteröffnung hin) früher eintritt, als bei Einströmung. Das Resultat entspricht unserer obigen Auffassung, da die Ausströmung leichter zur Wirbelbildung Veranlassung gibt, als die Einströmung. Bei Einströmung geht die kritische Geschwindigkeit rasch in die Höhe mit wachsendem Konvergenzwinkel des Trichters, sie ergibt sich in seinem Maßsystem bei den benutzten Röhren mit Wasser zu:

Konvergenzwinkel	0°	5°	7½°	10°	15°
kritische mittlere Geschwindigkeit	0,133	2,7	3,4	4,3	5,7.

Ferner liegt noch eine wichtige theoretische Untersuchung über diesen Gegenstand vor[7]). G. Hamel fragt nach Strömungsformen, die sich bei Berücksichtigung der quadratischen und der Reibungsglieder streng behandeln lassen. Unter der Forderung, daß die Stromlinien die einer Potentialströmung sein sollen, während die Geschwindigkeitsverteilung eine andere ist, ergeben sich bestimmte Spiralströmungen, und zwar auf logarithmischen Spiralen. Ein spezieller Fall ist der, daß der Windungswirbel der Spirale zu 0 wird, die Strömung also in eine von einem Punkt divergierende oder zu ihm konvergierende ausartet. Das wichtigste Resultat der Untersuchung ist, daß beim Ausströmen (auch in Spiralen) der Oeffnungswinkel eines Spiralkanals (bezw. Trichters) bei gegebener mittlerer Durchströmungsmenge nicht beliebig, sondern nach oben hin begrenzt, und umgekehrt bei gegebener Oeffnung die Durchströmungsmenge begrenzt ist, damit eine »laminare« Strömung überhaupt möglich ist. Beim Einströmen dagegen ergeben sich keine solche Einschränkungen. Man wird darin eine weitgehende Analogie zu den experimentellen Erfahrungen sehen. Weiter hat Hamel auch Nachbarlösungen dieser Strömungsformen untersucht, ohne aber auf die Stabilitätsfrage einzugehen.

[1]) Vergl. auch G. Kirchhoff: Vorl. über mathematische Physik, I, p. 375.

[2]) H. Lamb: Hydrodynamics, § 325 f.

[3]) C. W. Oseen: Ueber den Gültigkeitsbereich der Stokesschen Widerstandsformel; Archiv f. Mat. Astr. och Fysik (1912). — F. Noether (ebenso, Zeitschr. f. Mathematik u Physik 1912 und Gg. Zemplén, l. c. (S. 136[3])) nahmen irrtümlich an, daß in der Reihe nur die geraden Potenzen von $\mathfrak{R}$ vorkommen könnten.

[4]) Vergl. die bekannten Versuche von Eitel sowie L. Prandtl: Ueber den Widerstand von Kugeln, Göttinger Nachrichten, 1915.

[5]) A. H. Gibson: On the steady flow of an incompressible viscous fluid through a circular tube with uniformly converging boundaries. Phil. Mag. (6) 18 (1909), p. 35.

[6]) A. H. Gibson und H. Grindley: On the frictional resistance of the flow of air through a pipe. Proc. R. Soc. London 80 (1908), p. 114. — —: On the flow of water through pipes and passages, Proc. R. Soc. (83) 1910, p. 366. — —: On the resistance to flow of water through diverging boundaries. Trans. R. Soc. Edinbourgh 48 (1913), p. 87.

[7]) G. Hamel: Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten, Zeitschr. d. deutschen Math. Ver. XXV (1916), p. 34.

Endlich seien noch einige theoretische Fragestellungen genannt, die dem Reynoldsschen bezw. Couetteschen Fall verwandte Strömungsformen, aber unter anderen physikalischen Bedingungen, behandeln. L. Hopf[1]) behandelt, von der Vorstellung ausgehend, daß die Turbulenzschwingung den Zusammenhang der Flüssigkeit an der Wand lockere, den Grenzfall der Flüssigkeitsströmung zwischen nachgiebigen Wänden, für den also nicht die normale Geschwindigkeitskomponente an der Wand, wohl aber der Druck verschwindet. Für diesen Grenzfall ergibt die Methode der kleinen Schwingungen schon bei kleiner Reynoldsscher Zahl Labilität. Für das eigentliche Turbulenzproblem scheint mir diese Fragestellung nicht in Betracht zu kommen. Wir haben ja gesehen, daß, im Sinne der kleinen Schwingungen, auch die genaueren Experimente keine Labilität ergeben. Außerdem zeigt eine weitere Verfolgung des Hopfschen Ansatzes, daß er nur bei sehr geringem Elastizitätsmodul der Wände zu Abweichungen von den früher erwähnten Resultaten führt, während die den Versuchen zugrunde gelegten Wandungen praktisch als starr angesehen werden müssen. Auch in den vielfach erwähnten Arbeiten von Orr[2]) finden sich ähnliche Randbedingungen behandelt. Einen neuen Gesichtspunkt in der Turbulenzfrage hat L. V. King[3]) durch die Berücksichtigung der Kompressibilität der Flüssigkeit und der damit verbundenen Schallwellen herangezogen. Doch scheinen seine Ausführungen, die sich auf Beobachtungen im laminaren und turbulenten Gebiet stützen, noch wenig geklärt und erfordern jedenfalls zunächst genauere theoretische Durcharbeitung. 33

Die Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Technik.

Von G. WALLENBERG in Berlin-Wilmersdorf.

Vortrag, gehalten am 26. Januar 1920 im Ausschuß für technische Mechanik des Berliner Bezirksvereines deutscher Ingenieure.

Ein altes lateinisches Sprichwort sagt: »Natura non facit saltus« (Die Natur macht keine Sprünge). Dieses Sprichwort hat heute keine Geltung mehr: In der Physik ist in neuerer Zeit eine entschiedene Tendenz zum Diskontinuierlichen hervorgetreten — ich erinnere nur an die Elektronentheorie, die Plancksche Quantenhypothese und die Bornsche Theorie des Raumgitters —, eine Tendenz, die wegen ihrer Fruchtbarkeit und der bereits erzielten Erfolge wahrscheinlich auch nicht so bald wieder daraus verschwinden wird. Was bedeutet das für uns Mathematiker? Nicht mehr und nicht weniger, als daß die Differentialgleichungen nicht mehr ausreichen, um den Verlauf aller Erscheinungen zu beschreiben, sondern daß man zu den Differenzengleichungen seine Zuflucht nehmen muß. In der Tat mehren sich die Fälle, daß Physiker und in noch höherem Grade Techniker bei der mathematischen Behandlung der ihnen entgegentretenden Probleme auf Differenzengleichungen stoßen. Der bekannte Brückenbauer und Statiker Müller-Breslau an unserer Technischen Hochschule und seine Schüler rechnen schon seit Jahren mit Differenzengleichungen; die Clapeyronsche Gleichung für die Stützenmomente des durchlaufenden Trägers ist, wie wir sehen werden, nichts anderes als eine Differenzengleichung.

Ferner nenne ich A. Russel, Phil. magaz. Bd. 11 (1906): es handelt sich da um das elektrische Feld zwischen zwei Kugeln; M. Pupin, Transactions of Amer. Inst. of El. Eng. 1900, S. 245 (Theorie der Pupinleitung; vergl. auch Breisig, E. T. Z. 1909, S. 462); F. Emde, Elektrot. u. Maschinenbau, Wien 1906, S. 945, § 20 (Berechnung von Drehmagneten für vorgeschriebenes Drehmoment); R. Rüdenberg, Elektrot. Zeitschr. 1914, S. 412 (Spannungsverteilung an Kettenisolatoren); K. W. Wagner, ebenda, Heft 23, 24, 25 (Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen), Arch. für Elektrotechn. III (1915) (Theorie des Kettenleiters nebst Anwendungen) und Arch. für Elektrotechn. VI (1918), S. 301ff. (Wanderwellen-Schwingungen in Transformatorwicklungen) und endlich mehrere Abhandlungen von W. Rogowski in dem von ihm herausgegebenen Arch. für Elektrotechn. VI (1918) und VII (1919) über Spulen und Wanderwellen.

[1]) Zur Theorie der Turbulenz, Ann. d. Physik 56 (1919), p. 538.
[2]) l. c. S. 129 [3]). z. B. II. Artikel 12.
[3]) Turbulent flow in Pipes and Channels: Philos. Magazine 16, 32 (1916) p. 322.

Herr Wagner sagt in der ersten Abhandlung: »Bei manchen Aufgaben, wie bei der Berechnung vielfacher Reflexionen von Wanderwellen, der Spannungs- und Stromverteilung in künstlichen Leitungen, in Widerstandssätzen mit Rücksicht auf die Kapazität der mit den einzelnen Spulen verbundenen Metallteile, und bei ähnlichen Problemen bietet sich die Differenzengleichung ganz von selbst dar. Leider werden die Differenzengleichungen in den gangbaren mathematischen Lehrbüchern für Ingenieure und Physiker überhaupt nicht behandelt.« Es wäre in der Tat sehr wünschenswert, wenn dies recht bald geschehen würde; einen kleinen Anfang dazu hat W. Hort in seinem Buch: »Die Differentialgleichungen des Ingenieurs«[1]) gemacht. Wenn die Physiker und Techniker sich bisher mit Differentialgleichungen beholfen haben, so liegt der Grund darin, daß die Theorie der Differenzengleichungen, obwohl die ältere Schwester der Differentialgleichungen, gegen diese hochentwickelte Disziplin bis in die neueste Zeit arg zurückgeblieben war. Als ich im Jahre 1909 zusammen mit dem Norweger Alf Guldberg mein Buch: »Theorie der linearen Differenzengleichungen« (Teubner, Leipzig und Berlin 1911) zu schreiben begann, war mein Hauptzweck, wenigstens die formale Seite der Theorie auf das Niveau der Differentialgleichungen zu bringen, da über die funktionentheoretische Seite, d. h. über die analytische Darstellung der Lösungen einer linearen Differenzengleichung und die Erforschung ihrer funktionalen Eigenschaften, damals nur ganz vereinzelte unzusammenhängende Arbeiten vorlagen; in den letzten Jahrzehnten war fast vollständige Stille auf diesem Gebiete eingetreten. Aber gerade in den Jahren 1909 bis 1911, in denen ich mein Buch verfaßte, begann es sich auf unserem Felde zu regen, und ich konnte durch Benutzung mir übersandter handschriftlicher Aufzeichnungen des jungen dänischen Astronomen N. E. Nörlund, der jetzt Professor der Mathematik in Lund ist, dem Werke einen gewissen Abschluß geben. Seit dem Erscheinen des Buches, also in 8 Jahren, ist nun bereits eine ganze Literatur über die Theorie der linearen Differenzengleichungen entstanden, so daß diese ihrer jüngeren Schwester, der Theorie der linearen Differentialgleichungen, fast ebenbürtig geworden ist; deutsche, französische, englische, italienische, holländische, dänische, norwegische, russische, amerikanische und japanische Forscher sind daran beteiligt. — Also wir Mathematiker sind gerüstet und können den neuen Problemen, die Physik und Technik uns stellen, mit Ruhe entgegensehen.

Ich möchte Ihnen nun in dem heutigen einführenden Vortrage zeigen, was man schon mit den einfachsten, elementarsten Hilfsmitteln auf diesem Gebiete leisten kann, um Sie zur Benutzung dieser Hilfsmittel und damit zum Studium der Differenzengleichungen anzuregen. Zu diesem Zwecke will ich zunächst das nötigste Handwerkszeug herstellen, indem ich Ihnen kurz den Begriff der Differenzengleichung und ihrer Lösung entwickle: Ist y_x eine Funktion von x — man schreibt in der Differenzenrechnung das Argument gewöhnlich als Index —, so ist bekanntlich die »Differenz« Δy_x definiert durch die Gleichung $\Delta y_x = y_{x+h} - y_x$, worin h eine endliche Größe ist, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden kann, also $\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$; ferner die »zweite Differenz«:

$$\Delta^2 y_x = \Delta \Delta y_x = y_{x+2} - y_{x+1} - (y_{x+1} - y_x) = y_{x+2} - 2 y_{x+1} + y_x \text{ usw.}$$

Unter einer Differenzengleichung $n$ter Ordnung versteht man nun eine Gleichung zwischen der zu bestimmenden Funktion y_x und ihren ersten n Differenzen, deren Koeffizienten die unabhängige Veränderliche x enthalten können, also eine Beziehung von der Form:

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \ldots, \Delta^n y_x) = 0.$$

Setzt man für Δy_x, $\Delta^2 y_x$ usw. ihre Werte ein, so resultiert eine funktionale Beziehung:

$$\Phi(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n}) = 0,$$

in welcher Differenzen gar nicht mehr erkennbar sind; trotzdem nennt man auch diese eine Differenzengleichung.

Für die Technik sind nun von besonderer Wichtigkeit die linearen Differenzengleichungen von der Form:

$$y_{x+n} + p_x^{(1)} y_{x+n-1} + p_x^{(2)} y_{x+n-2} + \ldots + p_x^{(n)} y_x = q_x,$$

worin die $p_x^{(k)}$ und q_x gegebene Funktionen von x sind; ist $q_x = 0$, so heißt die lineare Differenzengleichung homogen. — Für eine große Reihe von Problemen der Technik

[1]) Inzwischen ist eine ausgezeichnete Schrift von P. Funk »Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen« (J. Springer, Berlin 1920) erschienen. Vgl. die Besprechung S. 147 dieses Heftes.

genügt schon die Betrachtung linearer Differenzengleichungen mit **konstanten** Koeffizienten und die Beschränkung auf **ganzzahlige** x (nämlich auf x als **Index**). In diesem Falle läßt sich aber leicht die allgemeine, bereits von **Lagrange** gefundene Lösung der Differenzengleichung angeben. Liegt z. B. eine homogen lineare Differenzengleichung dritter Ordnung vor:

$$y_{x+3} + p_1 y_{x+2} + p_2 y_{x+1} + p_3 y_x = 0 \quad \ldots \ldots \quad (A),$$

worin p_1, p_2, p_3 Konstanten sind, so machen wir den Ansatz $y_x = \alpha^x$, wo α noch zu bestimmen ist, und erhalten nach Division durch α^x für α die sogenannte »charakteristische« Gleichung:

$$\alpha^3 + p_1 \alpha^2 + p_2 \alpha + p_3 = 0,$$

deren Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zunächst voneinander verschieden sein mögen; dann ist, wie aus der Linearität der Differenzengleichung ohne weiteres folgt,

$$y_x = c_1 \alpha_1^x + c_2 \alpha_2^x + c_3 \alpha_3^x \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ willkürliche Konstanten})$$

die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (A); die willkürlichen Konstanten werden durch die »Anfangsbedingungen« des Problems bestimmt. Ist $\alpha_2 = \alpha_1$, so lautet die allgemeine Lösung:

$$y_x = c_1 \alpha_1^x + c_2 x \alpha_1^x + c_3 \alpha_3;$$

ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$, so lautet die Lösung:

$$y_x = c_1 \alpha_1^x + c_2 x \alpha_1^x + c_3 x^2 \alpha_1^x.$$

Sind zwei Wurzeln konjugiert komplex: $\alpha_1 = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\alpha_2 = \varrho (\cos \varphi - i \sin \varphi)$, so ist $\alpha_1^x = \varrho^x (\cos x \varphi + i \sin x \varphi)$, $\alpha_2^x = \varrho^x (\cos x \varphi - i \sin x \varphi)$, also die allgemeine Lösung:

$$y_x = C_1 \varrho^x \cos x \varphi + C_2 \varrho^x \sin x \varphi + c_3 a_3^x \; (C_1 = c_1 + c_2, \; C_2 = i (c_1 - c_2)).$$

Liegt eine **vollständige** lineare Differenzengleichung vor:

$$p_0 y_{x+3} + p_1 y_{x+2} + p_2 y_{x+1} + p_3 y_x = q \quad \ldots \ldots \quad (B)$$

(q Konstante), so setzen wir zunächst an $y_x = \beta$ (β Konstante) und erhalten $\beta (p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = q$, also die Partikularlösung:

$$y_x = \beta = \frac{q}{p_0 + p_1 + p_2 + p_3},$$

und daher die allgemeine Lösung:

$$y_x = c_1 \alpha_1^x + c_2 \alpha_2^x + c_3 \alpha_3^x + \beta$$

mit den etwaigen oben angegebenen Modifikationen; im Falle $\sum_{i=0}^{3} p_i = 0$ muß $y_x = \beta x$ angesetzt werden.

Eine Differenzengleichung (A) oder (B) kann als Rekursionsformel aufgefaßt werden, und als solche tritt sie gewöhnlich in der Technik auf; sie vertritt dann unzählig viele Gleichungen, die man erhält, wenn man $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ setzt, und wir sind jetzt imstande, irgend ein Glied der Reihe y_0, y_1, y_2, y_3, z. B. das tausendste, sofort anzuschreiben, falls die drei ersten y_0, y_1, y_2 gegeben sind. Ganz analog liegen die Verhältnisse bei der allgemeinen linearen Differenzengleichung $n$ter Ordnung. Ich will Ihnen nun an einigen Beispielen zeigen, wieviel man bereits mit diesen einfachen Hilfsmitteln leisten kann. Zunächst folgendes Beispiel:

$$y_{x+4} + 2 y_{x+3} + 3 y_{x+2} + 2 y_{x+1} + y_x = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Die charakteristische Gleichung

$$\alpha^4 + 2 \alpha^3 + 3 \alpha^2 + 2 \alpha + 1 = (\alpha^2 + \alpha + 1)^2 = 0$$

besitzt zwei Doppelwurzeln

$$\alpha_{1,2} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3};$$

daher lautet die allgemeine Lösung:

$$y_x = (\alpha_0 + \alpha_1 x) \cos \frac{2\pi}{3} x + (\beta_0 + \beta_1 x) \sin \frac{2\pi}{3} x,$$

worin $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ willkürliche Konstanten sind. Soll nun z. B. unter der Annahme

$$y_0 = y_1 = y_3 = 0, \quad y_2 = -1$$

y_{100} berechnet werden, so lassen sich diese Konstanten aus den Anfangsbedingungen folgendermaßen bestimmen:

$$y_0 = \alpha_0 = 0,\quad y_3 = \alpha_0 + 3\,\alpha_1 = 0,$$

$$y_1 = (\alpha_0 + \alpha_1)\cos\frac{2\pi}{3} + (\beta_0 + \beta_1)\sin\frac{2\pi}{3} = 0,$$

$$y_2 = (\alpha_0 + 2\,\alpha_1)\cos\frac{4\pi}{3} + (\beta_0 + 2\,\beta_1)\sin\frac{4\pi}{3} = -1;$$

also:

$$\alpha_0 = 0,\quad \alpha_1 = 0,\quad \beta_0 = -\beta_1 = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}};$$

folglich:

$$y_x = \frac{2(x-1)}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi}{3}x = \begin{cases} 0, \text{ wenn } x = 3k \ (k \text{ beliebige ganze Zahl}), \\ x-1, \text{ wenn } x = 3k+1, \\ 1-x, \text{ wenn } x = 3k-1; \end{cases}$$

und daher $y_{100} = 99$.

Das zweite Beispiel wähle ich, dem Zwecke meines heutigen Vortrages entsprechend, aus einem Ihnen naheliegenden Gebiet, der Statik; und zwar wähle ich als einfachste Anwendung die Theorie des kontinuierlichen Balkens (nach W. Hort »Die Differentialgleichungen des Ingenieurs«). Bekanntlich gilt für die Stützenmomente M_k eines kontinuierlichen Trägers, der in jedem Feld gleichmäßig belastet ist, die Clapeyronsche Gleichung (Hütte 1908, I, S. 468). Sind die Stützen alle gleich hoch, die Stützenentfernungen alle gleich groß $(= l)$ und die Belastungen in allen Feldern gleich q, so lautet diese Gleichung:

M_0 M_1 M_2 M_k M_{k+1} M_{k+2} M_n

h h h h h h h

l l l l

$$M_k + 4\,M_{k+1} + M_{k+2} = -\tfrac{1}{2}\,q\,l^2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad \text{(II)};$$

das ist aber eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung; die zugehörige homogene Gleichung

$$M_{k+2} + 4\,M_{k+1} + M_k = 0$$

besitzt die allgemeine Lösung: $M_k = c_1\,\lambda_1^k + c_2\,\lambda_2^k$,

worin λ_1 und λ_2 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + 4\,\lambda + 1 = 0 \quad (\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3})$$

sind, und daher die vollständige Gleichung (II) die allgemeine Lösung:

$$M_k = c_1\,\lambda_1^k + c_2\,\lambda_2^k - \frac{q\,l^2}{12} \quad (6\,\beta = -\tfrac{1}{2}\,q\,l^2).$$

Die Konstanten c_1 und c_2 bestimmen sich aus den Bedingungen, daß an den Enden des Balkens die Stützenmomente gleich Null sein müssen, d. h. aus

$$M_0 = c_1 + c_2 - \frac{q\,l^2}{12} = 0,$$

$$M_n = c_1\,\lambda_1^n + c_2\,\lambda_2^n - \frac{q\,l^2}{12} = 0, \text{ (Anzahl der Stützen } = n+1).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$c_1 = -\frac{q\,l^2}{12}\,\frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n},\quad c_2 = \frac{q\,l^2}{12}\,\frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n},$$

und daher:

$$M_k = -\frac{q\,l^2}{12}\left(1 + \frac{\lambda_2^n - 1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\,\lambda_1^k - \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1^n - \lambda_2^n}\,\lambda_2^k\right).$$

Nach dieser Formel können die Stützenmomente des durchlaufenden Trägers auf S. 470, Bd. I der Hütte (1908) berechnet werden.

Endlich möchte ich Ihnen kurz über einige Anwendungen der Differenzengleichungen in der Elektrotechnik berichten, und zwar auf die sogenannten Wanderwellen nach neueren Arbeiten von Wagner und Rogowski. Herr Wagner sagt in seiner Abhandlung »Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen« (E. T. Z. 1914, Heft 23, 24, 25): »Unter den Fragen, die gegenwärtig im Vordergrunde des Interesses stehen, nimmt die Beeinflussung von Schwachstromleitungen durch benachbarte

Hochspannungsleitungen eine hervorragende Stelle ein. Dies ist durch die rasche Entwicklung bedingt, die die Ueberlandzentralen in den letzten Jahren genommen haben. Die störenden Wirkungen entstammen verschiedenen Quellen; unter ihnen sind die von Wanderwellen in den Hochspannungsleitungen herrührenden Störungen bisher am wenigsten geklärt. Die störenden Wirkungen der Hochspannungsleitungen auf benachbarte Schwachstromleitungen haben den Anlaß zu lebhaften Auseinandersetzungen zwischen den Vertretern der beiden Fachgebiete gegeben. Die Schärfe der Diskussion hat vielleicht ihren Grund mit darin, daß die fraglichen Vorgänge teilweise noch wenig aufgeklärt sind und daß man sich daher über die erforderlichen Abwehrmaßregeln nicht einigen kann. Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, durch sachliche Aufklärung an der Einigung über die strittigen Fragen mitzuwirken.« Nun, meine Herren, die Entscheidung erfolgt mit Hilfe linearer Differenzengleichungen von so einfacher Art, wie ich Sie Ihnen vorgeführt habe! In der betreffenden Abhandlung wird nämlich gezeigt, wie man mit ihrer Hilfe die in den Schwachstromleitungen induzierten Wanderwellen berechnen kann. In einer anderen Abhandlung (»Wanderwellen-Schwingungen in Transformatorwicklungen«, Arch. für Elektrot. VI (1918), S. 301—326) sagt Herr Wagner: »Die Frage nach der Beanspruchung von Transformatorwicklungen durch eindringende elektrische Wellen erlangte eine praktische Bedeutung, sobald man erkannt hatte, daß viele der sogenannten Ueberspannungen von Wanderwellen herrühren. Anfangs begnügte man sich damit, die Wicklungen als gewöhnliche gestreckte Leitungen mit dem besonderen Kennzeichen eines hohen Wellenwiderstandes zu betrachten. Diese Auffassung gibt von den Vorgängen ein einfaches Bild, das für manche Zwecke ausreicht; es genügt aber nicht, um die Beanspruchung der Wicklung zu bestimmen. Der Grund ist, daß sich die Wellen in einer Wicklung infolge der gegenseitigen Beeinflussung benachbarter Windungen wesentlich anders ausbreiten als in einer gestreckten Leitung. Von der Art der Ausbreitung hängt aber die räumliche Feldverteilung ab, die die Beanspruchung bestimmt. Nun ist das elektromagnetische Feld einer in der Wicklung verlaufenden Welle ein so kompliziertes Gebilde, daß man heute nicht erwarten darf, diesen Vorgang mit allen seinen Feinheiten rechnerisch erfassen zu können. Die Rechnung muß sich daher mit dem bescheidenen Ziel begnügen, die Vorgänge in groben Zügen wiederzugeben. Zu diesem Zweck betrachtet man an Stelle der wirklichen Wicklung eine Ersatzspule mit einfacheren elektromagnetischen Eigenschaften.«

Um nun auf eine Differentialgleichung zu kommen, mußte man bisher die Natur vergewaltigen, indem man die Windungslänge der Spule unendlich klein annahm — das hat Wagner selbst in einigen früheren Arbeiten und dann O. Böhm in seiner übrigens sehr tüchtigen Darmstädter Doktordissertation (1917) getan. »Bei der homogenen Spule mit unendlich kleiner Windungslänge macht aber«, wie Herr Wagner weiter sagt, »die Definition der Windungskapazität und der Gegeninduktivität benachbarter Windungen einige begriffliche Schwierigkeiten (beide werden im Grenzfall unendlich groß); weitere Schwierigkeiten ergeben sich bei der Feststellung der richtigen Grenzbedingungen (die eine Grenzbedingung Böhms ist denn auch falsch geraten). Alle diese Denkschwierigkeiten entfallen, wenn man gleich von vornherein der Wirklichkeit entsprechend eine Spule mit endlicher Windungszahl und endlicher Windungslänge in die Betrachtung einführt. Ueberraschenderweise läßt sich die Rechnung für diesen Fall streng durchführen; sie gestaltet sich sogar einfacher als bei dem idealisierten homogenen Spulengebilde mit unendlich vielen Windungen.« Man kommt auf eine lineare Differenzengleichung vierter Ordnung. »An Hand der gefundenen Lösung sind diejenigen Fragen, die bei dem Problem von praktischer Bedeutung sind, unschwer zu beantworten.« Also, meine Herren, die Differenzengleichungen setzen uns in den Stand, mit einfacheren Mitteln der Wirklichkeit näher zu kommen als bisher — das genügt wohl!

Zum Schluß möchte ich Ihnen aus den neuesten, im Archiv für Elektrotechnik erschienenen Arbeiten von Rogowski, der übrigens das Spulenproblem unter anderen Voraussetzungen angreift als Böhm und Wagner, einige Differenzengleichungen vorführen, um Ihnen zu zeigen, daß dieselben wirklich zu der von uns betrachteten einfachen Art gehören. Auf ihre Ableitung kann ich allerdings nicht eingehen, um Ihre Zeit nicht allzulange in Anspruch zu nehmen, und muß Sie deswegen schon auf die betreffenden Abhandlungen selber verweisen.

1. Spulen und Wanderwellen. I. Einschaltspannungen der Spule aus zwei Windungen. VI. Band (1918), 8. Heft, S. 291.

$$\mu_{p+2} - \beta\,\mu_{p+1} + \alpha\,\mu_p = 0 \quad (\alpha \text{ und } \beta \text{ Konstanten});$$

μ_p ist die Spannung der rechtsläufigen Wanderwelle der Spule nach vollendetem $p$ten »Lauf« (d. h. Hin- und Rückgang). Sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\xi^2 - \beta\,\xi + \alpha = 0$, nämlich $\xi_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha}$ reell, so lautet die allgemeine Lösung:

$$\mu_p = A\,\xi_1{}^p + B\,\xi_2{}^p;$$

sind die Wurzeln dagegen komplex: $\xi_{1,2} = \sqrt{\alpha}(\cos\gamma \pm i\sin\gamma)$, wo $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\,\varepsilon}{\beta}$, $\varepsilon = \sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{4}}$, so lautet die allgemeine Lösung:

$$\mu_p = \sqrt{\alpha}^p\,(F\cos p\,\gamma + G\sin p\,\gamma);$$

die willkürlichen Konstanten A, B bezw. F, G werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt; beide Fälle sind von Bedeutung für das in Rede stehende Problem.

2. Spulen und Wanderwellen. II. Resonanzspannungen beim Einschalten einer Spule aus zwei Windungen. VI. Band (1918), 11. Heft, S. 382.

$$D = \mu_{p+3} + a\,\mu_{p+2} - a\,\mu_{p+1} - \mu_p = \delta\,E$$

(a und δ Konstanten, desgl. die Schaltspannung E). Hier ist die Summe der linksstehenden Koeffizienten gleich Null; wir setzen also als Teillösung an: $\mu_p = \beta\,p$; es ergibt sich $\beta = \frac{\delta\,E}{3+a}$. Die zur reduzierten Differenzengleichung $D = 0$ gehörige charakteristische Gleichung

$$\alpha^3 + a\,\alpha^2 - a\,\alpha - 1 = 0 \quad (a < 1)$$

hat die Wurzeln $\alpha_1 = 1$, $\alpha_{2,3} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ $\left(\cos\varphi = -\frac{1+a}{2},\ \sin\varphi = {}^1/_2\sqrt{(1-a)(3+a)}\right)$; die allgemeine Lösung lautet also:

$$\mu_p = A + B\cos p\,\varphi + C\sin p\,\varphi + \frac{\delta\,E}{3+a}\,p;$$

die Konstanten A, B, C werden den Bedingungen des Problems gemäß bestimmt.

3. Wanderwellen und Spulen. IV. Der Einschaltvorgang bei der Spule aus drei Windungen. VII. Band (1919), 6. Heft, S. 167:

$$\mu_{p+2} + \mu_{p+1} + \mu_p = \frac{E}{2}\left(\mu_0 = \frac{E}{2},\ \mu_1 = 0\right);$$

die charakteristische Gleichung $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ hat die Wurzeln $\alpha_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3} = \cos\vartheta \pm i\sin\vartheta$ ($\vartheta = 120^0$); die allgemeine Lösung lautet: $\mu_p = A\cos p\,\vartheta + B\sin p\,\vartheta + \frac{E}{6}$; die Anfangsbedingungen ergeben: $A = \frac{E}{3}$, $B = 0$. S. 171: $\mu_{p+2} + \frac{8}{5}\mu_{p+1} + \mu_p = \frac{3}{5}E$; charakter. Gl. $\alpha^2 + \frac{8}{5}\alpha + 1 = 0$: $\alpha_{1,2} = -\frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}\,i\cos\vartheta' \pm i\sin\vartheta'$ ($\vartheta' = 143^0\ 10'$); allgemeine Lösung: $\mu_p = A\cos p\,\vartheta' + B\sin p\,\vartheta' + \frac{E}{6}$. Lösung mit den Anfangsbedingungen $\mu_0 = \frac{4}{10}E$, $\mu_1 = -\frac{4}{100}E$: $\mu_p^{(1)} = \frac{E}{30}(7\cos p\,\vartheta' - \sin p\,\vartheta' + 5)$; Lösung mit den Anfangsbedingungen $\mu_0 = \frac{2}{10}E$, $\mu_1 = \frac{28}{100}E$: $\mu_p^{(2)} = \frac{E}{30}(\cos p\,\vartheta' + 7\sin p\,\vartheta' + 5)$.

Schwieriger werden natürlich die Verhältnisse, wenn die Koeffizienten der Differenzengleichungen nicht mehr konstant sind, aber auch hier sind schon in vielen Fällen erfolgreiche Ansätze gemacht worden; doch verbietet mir die vorgeschrittene Zeit, näher darauf einzugehen.

Damit schließe ich meine heutigen Ausführungen. Diese hatten den Zweck, Sie, meine Herren, mit einem bisher leider viel zu wenig benutzten Hilfsmittel der »technischen Mathematik« — wenn ich so sagen darf — bekannt zu machen. Ich hoffe, daß Sie, angeregt durch meinen einführenden Vortrag, sich eingehender mit der Theorie dieses einfachen und fruchtbaren Hilfsmittels beschäftigen werden — ich empfehle Ihnen zu diesem Zweck zunächst das ausgezeichnete Buch von Markoff über Differenzenrechnung; auch das kleine Büchlein von Seliwanoff genügt schon für den ersten Anfang; für weitergehende Ansprüche wäre zu nennen die »Differenzenrechnung« von Boole sowie mein Lehrbuch der »Theorie der linearen Differenzengleichungen«. — Wenn dann einige von Ihnen sich dieses nützlichen Hilfsmittels bei den Ihnen entgegentretenden technischen Problemen auch bedienen werden, so hat mein Vortrag seinen Zweck erfüllt.

KURZE AUSZÜGE

Baumechanik.

Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. Die Elastizitätsgleichungen von Maxwell-Mohr (bezw. die Gleichungen Müller-Breslaus) oder der Satz von Menabrea von der kleinsten Formänderungsarbeit gestatten die Berechnung aller (stereo-) statisch unbestimmten, gelenkigen oder aus biegungssteifen Elementen bestehenden Tragsysteme. Die Wahl der Überzähligen unterliegt nach Zurückführung auf den statisch bestimmten Grundfall im allgemeinen keiner Beschränkung. Man kann auch Abhängige der Überzähligen bestimmen, wenn dadurch eine einfachere Lösung erreicht wird. So ist ein mit n gelenkigen Knotenpunkten statisch bestimmtes ebenes Fachwerk bei Berücksichtigung der Steifigkeit der Knotenpunkte $(3n-6)$ fach statisch unbestimmt. Mohr verwendet als Unbekannte die Knotendrehwinkel (d. h. die für einen Knoten konstanten Drehwinkel der Stabenden bei der Formänderung), wodurch es gelingt, das Problem mit der Auflösung von n linearen Gleichungen zu erledigen. Es ist dies ein Verfahren, das auch auf Rahmenberechnungen übertragen wurde[1]).

F. Bleich zeigt, daß es bei Rahmentragwerken durch Hinzufügen der Stabdrehwinkel (d. h. der Drehwinkel der Stabsehnen bei einer Deformation) als weiterer Unbekannten zu den vorhandenen Überzähligen, möglich wird, die Elastizitätsbedingungen in einer ähnlichen Form anzusetzen, wie dies beim durchlaufenden Balken mittels der Clapeyron'schen Gleichungen der Fall ist. (Der Viermomentensatz und seine Anwendung auf die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke, Der Eisenbau 1917, S. 46 bis 61; Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes, Berlin 1918.)

Stoßen in einer Rahmenecke mehrere Stäbe zusammen, so kann man für je zwei derselben eine sog. „Kontinuitätsbedingung" aufstellen, die ausdrückt, daß es für jede Ecke nur einen Knotendrehwinkel gibt. Es entstehen Viermomentengleichungen, die die vier Endmomente der beiden Stäbe und die beiden Stabdrehwinkel enthalten. Die Viermomentengleichungen geben mit den zwei sog. „Winkelgleichungen", die für jeden geschlossenen Rahmen angesetzt werden ,und die Bedingung dafür sind, daß der Rahmen auch nach der Formänderung ein geschlossener bleibt, die notwendige Gleichungszahl zur Berechnung aller Unbekannten. — Bei einem geschlossenen Rahmen von n Seiten sind (da ein Stab festgehalten gedacht wird) $n-1$ Stabdrehwinkel und die drei Überzähligen als Unbekannte vorhanden, denen zur Bestimmung n Viermomentengleichungen und zwei Winkelgleichungen gegenüberstehen. Da man jeden Rahmen durch Hinzufügen von Stäben als einen geschlossenen betrachten kann, besteht allgemein bei jedem Rahmentragwerk (das ja nur aus einzelnen geschlossenen Rahmen zusammengesetzt sein kann), Gleichzahl von Unbekannten und Bestimmungsgleichungen.

Der Rechnungsgang ist der, daß aus dem Gleichungssystem zuerst die Stabdrehwinkel eliminiert werden, wonach so viel Gleichungen übrig bleiben als Überzählige da sind. Dann erst werden die Überzähligen ausgesucht, die Eckmomente durch sie dargestellt und die so gewonnenen Gleichungen aufgelöst. Man kann also die Auswahl der statisch unbestimmten Größen nach dem Aufstellen der Elastizitätsbedingungen und daher so treffen, daß die Rechenarbeit möglichst gering wird; dies führt Bleich als einen Hauptvorzug seines Verfahrens an.

Durch Benutzung von Hilfsgrößen, die der Differenz von Knotendrehwinkel und Stabdrehwinkel entsprechen, kann mitunter eine Vereinfachung erzielt werden[1]). Um die Gleichungszahl zu verringern, können auch Viermomentengleichungen Verwendung finden, bei denen Eckmomente von Zwischenpunkten und zugehörige Stabdrehwinkel ausgeschieden sind.

Das Verfahren besitzt den Vorteil, immer in der gleichen mechanischen Weise eine Lösung zu bieten. Wenn auch in manchen Fällen andere Methoden — z. B. bei Berechnung des eingespannten Stabzuges, die Anwendung des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit — bequemer werden, so kann dies die Bedeutung der Bleich'schen Untersuchungen keineswegs verringern.

Knickfestigkeit von Rahmen. In dem Aufsatz „Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen" (Der Eisenbau 1919, S. 27 bis 37, 71 bis 83, 117 bis 123 nnd 163 bis 172) knüpft Bleich an seine oben bezeichneten Arbeiten an und stellt die Viermomentengleichungen unter Berücksichtigung der biegenden Wirkung von Längskräften auf. Diese Gleichungen bilden in Verbindung mit den Gleichgewichtsbedingungen für jeden Stab und

[1]) Siehe W. Gehler, Die Ermittlung der Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken und das praktische Rechnungsverfahren nach Mohr. Berlin 1910. Rahmenberechnung mittels der Drehwinkel, Festschrift, Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstage, Berlin 1916, S. 83 bis 123.

[1]) Siehe das Mohrsche Verfahren der Berechnung der Nebenspannungen und weiters: A. Bendixsen, Die Methode der α-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen, Berlin 1914.

den früheren Winkelgleichungen das System der Knickgleichungen. Ein geschlossener Rahmen mit n Stäben besitzt jetzt nach Bleich an Unbekannten: n Knickmomente, n Stabdrehwinkel und zwei sog. Knickkräfte, so daß also die Zahl der Unbekannten mit der Zahl der Knickgleichungen bilanziert. Durch das Nullsetzen der Determinante der Knickgleichungen ergibt sich die Knickbedingung. Es werden mehrfach gestützte Stäbe, ein zweistieliger symmetrischer Rahmen, ein Stabzug in Kreisbogenform sowie ein geschlossenes Stabeck im Kreise nach dieser Methode untersucht.

Vereinfachung bei Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eine Vereineinfachung in der Berechnung statisch unbestimmter Systeme wird bekanntlich durch Aufstellen von Elastizitätsgleichungen erzielt, bei denen nicht alle Unbekannten in allen Gleichungen vorkommen. Man kann die Elastizitätsbedingungen in der Müller-Breslauschen Form unter Heranziehung von Biegungslinien und Verschiebungsplänen stets so umformen, daß jede Gleichung nur eine Unbekannte enthält, ein Verfahren, das aber bei höherer statischer Unbestimmtheit umständlich wird. Durch Verknüpfung von Überzähligen zu neuen Unbekannten, sowie endlich auch durch Einführung von statisch unbestimmten Hauptsystemen können fallweise äußerst günstige Verhältnisse erreicht werden. Ein dem zweiten Verfahren in gewisser Hinsicht entsprechendes ist das der Belastungsumordnung (B. U. Verfahren) von W. L. Andrée, das bei Tragwerken mit wenigstens einer Symmetrieachse angewendet werden kann und bei dem eine Verknüpfung von Lastangriffen stattfindet. (Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme, das B. U. Verfahren, München u. Berlin 1919, vgl. a. Der Brückenbau 1915, Heft 5)[1]). Andrée zerlegt die Belastung in symmetrische und wie er sich ausdrückt, umgekehrt-symmetrische Teilbelastungen, die zusammen die ursprüngliche Belastung ergeben, bei denen aber einzeln, infolge des Ausscheidens von Überzähligen, die Rechnung einfacher durchzuführen ist. Sie kann hierbei natürlich nach irgend einer der bekannten Methoden vorgenommen werden. Sehr oft wird durch diesen Kunstgriff die Lösung außerordentlich erleichtert.

Knickung von Rahmenstäben. Der Einsturz des Hamburger Gasbehälters im Jahre 1909, dessen Ursache die nicht ausreichende Knickfestigkeit eines Rahmenstabes war, gab Veranlassung, die Knickfestigkeit von Rahmenstäben genauer zu untersuchen[2]). H. Müller-Breslau beschäftigte sich eingehend mit dieser Frage; seine Lösung ist aber nicht sehr durchsichtig[1]). Neuerdings hat Prof. K. Ljungberg (Stockholm) dieses für die Baupraxis wichtige Problem behandelt (Der Eisenbau, 1920, S. 243 bis 251. Ljungberg nimmt an, daß sich die Belastung auf beide Gurtstäbe je halb verteilt und sich die Querstäbe so verbiegen, daß in ihrer Mitte ein Wendepunkt, also das Biegungsmoment gleich null ist. Unter Berücksichtigung der Stetigkeit der für beide Gurtstäbe gleich angesetzten Biegungslinien bleiben noch als Unbekannte die Querkräfte inmitten der Querstäbe und ein Neigungswinkel der elastischen Linie eines Gurtstabes bestehen. Die notwendige Gleichungszahl wird daraus abgeleitet, daß der rechte Winkel beim Anschluß jeder Querverbindung an die Gurtung auch nach der Formänderung erhalten bleibt und aus der Symmetriebedingung, daß die elastische Linie des Gurtstabes in ihrer Mitte eine Tangente besitzt, die parallel zur ursprünglichen Stabachse verläuft. Infolge der letzteren Voraussetzung muß sich die Rechnung auf Sonderfälle mit einer bestimmten Zahl von Querstäben beschränken. (Durch diese Annahme über die Form der Biegungslinie läuft man Gefahr, Knicklasten zu verlieren; richtig wäre es, die Ausbiegung am Ende des Gurtstabes gleich null zu setzen.) Das Unbestimmtwerden der Unbekannten stellt hiernach die Knickbedingung dar. Ljungberg überprüft seine Rechnungsergebnisse an dem Versuchsstab, der nach dem Hamburger Einsturz im Kgl. Materialprüfungsamt Berlin-Lichterfelde erprobt wurde. Die Übereinstimmung ist befriedigend. Jedoch ist auch jetzt das Problem der Knickfestigkeit von Rahmenstäben noch nicht als erledigt zu betrachten. 41

Ratzersdorfer.

Zur Berechnung des durchlaufenden Balkens will Farid Boulad durch den folgenden Satz einen bequemen Zugang gewinnen (Comtes rendus de l'acad. Paris, Bd. 159, 1914, S. 161—163). Es seien für einen Balken auf zwei Stützen x_1 und x_2 die vom linken Auflager gerechneten Abszissen zweier Punkte des Balkens, die links von sämtlichen Lasten liegen. Die Sehne, die diese Punkte in ihrer deformierten Lage verbindet, schneide die linke Auflagerkraft in A. Der Abstand der Lastresultierenden vom rechten Auflager sei c. Trägt man c als Ordinate (in der Lastrichtung) im Punkte x_2 auf, verbindet den so entstehenden Endpunkt mit dem Punkt x_1 (auf dem nicht deformierten Balken), so trifft die durch A gehende Parallele zu dieser Verbindungsgeraden die Abszissenachse in einem Punkte F, dessen Lage von c unabhängig ist, also sich nicht ändert, wenn die Lasten so bewegt werden, daß sie rechts von x_1 und x_2

[1]) In verschiedentlichen Aufsätzen von L. Herzka über Rahmenträger (Der Eisenbau 1915, Zeitschr. f. Betonbau 1915 u. 1916 wurde, wie auch Andrée angibt, das Verfahren der Belastungsumordnung ebenfalls verwendet.

[2]) Vgl. die bezüglichen Aufsätze in »Der Eisenbau« 1911.

[1]) H. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1913, S 380 bis 415.

bleiben. Die Abszisse von F ist, wenn y_1 und y_2 die Durchbiegungen in x_1 und x_2 bezeichnen, gleich

$$\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{c}.$$

Der Beweis ergibt sich ohne weiters, durch Einsetzen der bekannten Ausdrücke für y_1 und y_2. In welcher Weise die Anwendung auf den durchlaufenden Träger geschieht, ist leicht einzusehen, weniger überzeugend ist der praktische Wert dieser Berechnungsweise. 42

Mises.

Praktische Analysis.

Einfache Berechnung der Logarithmen. Wenn der Praktiker wohl auch kaum jemals in die Lage kommen dürfte, einen Logarithmus selbst berechnen zu müssen, so mag es doch nicht uninteressant sein, ein Verfahren kennen zu lernen, das sich zufolge seiner Einfachheit dem Gedächtnis leicht einprägt. K. Kommerell beschreibt (im Archiv d. Mathem. u. Phys., Bd. 28, 1920, S. 137—145) die Berechnung von gemeinen (Briggschen) Logarithmen durch bloßes Quadrieren. Man darf annehmen, daß die Zahl a, deren log gesucht wird, einstellig ist, also zwischen 1 und 10 liegt. Dann quadriert man sie so oft, bildet also a^2, a^4, a^8 usw., bis das Resultat über 10 liegt. Sei dies beim α-ten Schritt der Fall, dann kürzt man dies Resultat durch 10 und quadriert weiter, bis man — jetzt beim β-ten Schritt, vom Anfang an gezählt — wieder über 10 hinauskommt usw. Der gesuchte Logarithmus ist

$$\log a = (1/2)^\alpha + (1/2)^\beta + (1/2)^\gamma + \ldots\ldots$$

Man braucht somit bloß die Potenzen von $1/2$ zu kennen, um $\log a$ durch Addition zu finden. Um fünf Dezimalstellen sicher zu haben, sind 20 Quadrierungen erforderlich, für drei Dezimalstellen genügen etwa 13. — Auch die Umkehrung, d. h. Aufsuchung der Grundzahl zu gegebenem Logarithmus, läßt sich im Anschluß an dieses hübsche Verfahren durchführen.

Fehlergrenze bei näherungsweiser Gleichungs-Auflösung. Sucht man die Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ zu finden und hat man zu diesem Zwecke festgestellt, daß $f(a)$ und $f(b)$ verschiedenes Vorzeichen haben, so wird man als ersten, rohen Näherungswert für die Wurzel den Ausdruck

$$x = \frac{a f(b) - b f(a)}{b - a}$$

ansetzen. Dieses x liefert ja den Schnittpunkt der durch die Punkte $a, f(a)$ und $b, f(b)$ hindurchgehenden Sehne mit der Abszissenachse. Wird nun angenommen, daß $f(x)$ in dem durch a, b begrenzten Bereich in eine Taylorsche Reihe entwickelt werden kann, und mit M der größte Absolutwert der zweiten Ableitung $f''(x)$ bezeichnet, so ist, wie G. Milhaud in ganz einfacher Weise darlegt (Nouv. annales de mathém. Bd. 14, 1914, S. 13—15), der dabei begangene Fehler ε

$$\varepsilon \leq \frac{(b-a)^3 M}{8\,|f(b) - f(a)|}.$$

Diese Fehlergrenze kann in besonderen Fällen tatsächlich erreicht werden.

Neues Verfahren zur numerischen Integration. In Analogie zu dem sog. Ritzschen Verfahren will Al. Fischer (Physik. Zeitschr. Bd. 22, 1921, S. 26—28) gewöhnliche Differentialgleichungen in der Weise lösen, daß er sie durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten im Sinne der „Methode der kleinsten Quadrate" näherungsweise befriedigt. Sei etwa y als Funktion von x gesucht und mit $y', y'' \ldots\ldots$ die erste, zweite ..... Ableitung von y bezeichnet. Die vorgelegte Gleichung laute:

$$f(x, y, y', y'') = 0. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Nun wähle man für y einen Ansatz, der die vorgeschriebenen Nebenbedingungen erfüllt und überdies eine Anzahl unbestimmter Koeffizienten enthält, z. B. ein Polynom n-ten Grades ($n > 2$):

$$y = a_0 + a_1 x + a^2 x_2 + \ldots\ldots a_n x^n, \quad (2)$$

wo etwa a_0, a_1, a_2 durch die Integrationsbedingungen festgelegt seien. Dann bestimme man die übrigen Koeffizienten a_3, $a_4 \ldots\ldots a_n$ so, daß man $y, y' \ldots\ldots$ aus (2) in (1) einsetzt, das Quadrat der so entstandenen Funktion von x integriert und dies Integral zu einem Minimum macht:

$$\int f^2\, dx = \min. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Als Integrationsgrenzen in (3) müssen offenbar die Grenzen des Bereiches, in dem das Integral von (1) verlangt wird, gelten. — Der Gedanke kann vielleicht in besonderen Fällen nützlich werden; aus den völlig trivialen Beispielen, die der Verfasser gibt, kann man über die Anwendungsmöglichkeiten nichts ersehen. Mises. 42

Interpolation durch ganze rationale Funktionen. Tobin gibt in Nr. 238 des philosophical magazine (Bd. 40, 1920, S. 513 bis 515) eine direkte Lösung der Aufgabe, eine ganze rationale Funktion r-ten Grades $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r$ zu bestimmen, die an $r + 1$ Stellen $x = 1, 2, \ldots\ldots r + 1$ die gegebenen Werte $y_1, y_2, \ldots\ldots y_{r+1}$ annimmt. Er vermeidet also den Umweg über die Lagrangesche oder Newtonsche Formel und bestimmt die Koeffizienten unmittelbar aus den Bedingungsgleichungen

$$y_1 = a_0 + a_1 + \ldots\ldots + a_r$$
$$y_2 = a_0 + 2 a_1 + \ldots\ldots + 2^r a_r$$
$$\vdots$$
$$y_{r+1} = a_0 + (r+1) a_1 + \ldots\ldots + (r+1)^r a_r.$$

Multipliziert man die s-te dieser Gleichungen mit dem Binominalkoeffizienten

$(-1)^{s+1}\binom{r+1}{s}$ und addiert die Gleichungen, so erhält man

$$a_0 = (r+1)\,y_1 - \binom{r+1}{2}\,y_2 + \ldots + (-1)^r\,y_{r+1}.$$

Dies folgt aus den Identitäten

$$(r+1)^k - \binom{r+1}{1}\,r^k + \binom{r+1}{2}\,(r-1)^k \ldots + (-1)^{r+1}\binom{r+1}{1} = 0,$$

die für $k < r+1$ gelten. Sie ergeben sich aus der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y+1}\ldots\frac{1}{y+r+1} = \frac{1}{(r+1)!}\sum_{s=0}^{s=r+1}(-1)^s\,\frac{\binom{r+1}{s}}{y+s},$$

wenn man rechts nach Potenzen von $\frac{1}{y}$ entwickelt und bemerkt, daß nach Maßgabe der linken Seite die niedrigste rechts vorkommende Potenz die $(r+2)$-te sein muß.

Hat man so a_0 bestimmt, so kann man ganz ebenso a_1 berechnen. Man schreibe nur die ursprüngliche Gleichung so

$$\eta = \frac{y - a_0}{x} = a_1 + a_2\,x + \ldots + a_r\,x^{r-1},$$

bestimme hierauf die zu $x = 1, 2, \ldots r$ gehörigen Werte $\eta_k = \frac{y_k - a_0}{k}$ und berechne dann nach der angegebenen Methode a_1. So kann man weitergehen und erhält ein sehr bequemes Rechenverfahren zur Bestimmung der Koeffizienten.

Numerische Integration von Differentialgleichungen. G. Duffing entwickelt in Heft 224 der Forschungsarbeiten des Vereines Deutscher Ingenieure ein neues sehr brauchbares Verfahren zur praktischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Sein Grundgedanke werde kurz für die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = R(x, y) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

erläutert. Ihr durch (x_0, y_0) gehendes Integral soll ermittelt werden. Er ersetzt (1) durch die gleichwertige Gleichung

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} R(x, y(x))\,dx.$$

Im Punkte $x = x_1$, für den die Lösung $y(x_1) = y_1$ berechnet werden soll, ist also

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} R(x, y(x))\,dx.$$

Den Integranden denkt sich Duffing genähert durch eine Parabel, welche im Punkte (x_0, y_0) die Kurve $y = R(x, y(x))$ berührt und die durch den Punkt (x_1, R_1) geht. Dieser an sich willkürliche Punkt wird nachher noch zweckmäßig gewählt werden. Die so bestimmte Näherung des Integranden führt nach leichter Rechnung auf den folgenden genäherten Integralwert:

$$y_1 - y_0 = \frac{x_1 - x_0}{6}\,[4\,R(x_0, y_0) + (x_1 - x_0)\,R'(x_0, y_0) + 2\,R_1],$$

wobei R' die totale Ableitung von $R(x, y(x))$ nach x ist.

Nun liegt es nahe, das noch willkürliche R_1 durch die Bedingung festzulegen, daß diese Näherungslösung im Punkte (x_1, y_1) mit der durch das Richtungsfeld der Differentialgleichung vorgeschriebenen Richtung ankommen soll. Das führt zu der impliziten Bedingungsgleichung $R(x_1, y_1) = R_1$ für y_1 oder

$$y_1 - y_0 = \frac{x_1 - x_0}{6}\,[4\,R(x_0, y_0) + (x_1 - x_0)\,R'(x_0, y_0) + 2\,R(x_1, y_1)].$$

Der Verfasser prüft leider die Genauigkeit seines Verfahrens nur an Beispielen, bei denen die Lösung auf anderem Wege mit beurteilbarer Genauigkeit bekannt ist. Er sagt über die Prüfung der Genauigkeit in anderen Fällen nichts. Indessen ist es leicht, sich in jedem Fall über die Güte der erreichten Näherung ein Urteil zu bilden. Man muß sich nur klar machen, daß durch das Verfahren des Verfassers eine Kurvenschar bestimmt wird, deren Richtungsfeld das Richtungsfeld der Differentialgleichung annähert. Gerade für Fälle, wo volle Kurvenscharen bestimmt werden sollen, empfiehlt ja Duffing sein Verfahren. Man wird sich leicht darüber orientieren können, mit welcher Genauigkeit das Richtungsfeld der Näherungslösungen mit dem Richtungsfeld der Differentialgleichung übereinstimmt. Es sind aber bekannte Regeln aus der Praxis der Differentialgleichungen, die es erlauben, von hier aus die Genauigkeit der Näherungslösungen selbst zu beurteilen. Bieberbach. 30

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. PAUL **FUNK,** Privatdoz. a. d. deutsch. Univers. und a. d. deutsch. Techn. Hochsch. in Prag, Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Mit 24 Textabb. Berlin, Jul. Springer, 1920. 84 S.

Die Theorie der Baukonstruktionen wird mathematisch im wesentlichen erfaßt von der Theorie der linearen Gleichungen und der linearen Differentialgleichungen.

Die auftretenden Gleichungen sind allerdings fast immer von besonderem, regelmäßigem Aufbau, durch dessen Ausnutzung die Statik der Baukonstruktionen in bezug auf die geschickte Auswahl der Unbekannten und die Transformation der Gleichungen in den letzten Jahrzehnten sehr große Fortschritte gemacht hat, die erst die Durchführung schwieriger Aufgaben ermöglicht haben. Zum nicht geringsten Teil sind diese Fortschritte zurückzuführen auf

die mechanisch-anschauliche Deutung, die jedem Schritt der statischen Berechnung gegeben wurde. Die Ausführung von Integrationen durch Seilpolygone oder Biegungslinien, die Gleichgewichtsdeutungen bei Sätzen aus der synthetischen Geometrie und die fortwährende Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen nicht nur für eigentliche Gleichgewichtsprobleme, sondern auch für die Ausbeutung der Invarianzeigenschaften der Arbeit, d. h. die Zurückführung von Verschiebungsplänen auf Kraftpläne und umgekehrt, sind solche anschaulich mechanische Verfahren.

Durch diese Art der Arbeit forschender Ingenieure ist der rein mathematische Inhalt bezw. Hintergrund der Methoden der Statik der Baukonstruktionen etwas verwischt worden.

Von Zeit zu Zeit wird es allerdings gut sein, wenn die rein mathematische Entwicklung und die Festigkeitslehre der Baukonstruktionen sich wieder einander nähern und ihre Methoden und Ergebnisse vergleichen und verwerten. Ein Streben dazu ist in der letzten Zeit schon öfter bei der sehr zweckmäßigen Anwendung der Differenzengleichungen für regelmäßige Fachwerke zutage getreten und der Verfasser nimmt gerade diese Anwendungen zur rechten Zeit zum Anlaß, das Band zwischen den Mathematikern und den forschenden Ingenieuren zu verstärken.

Der Titel des Buches ist eigentlich zu eng gefaßt, denn es bringt außer den Differenzengleichungen auch wesentliche Dinge aus der Theorie der Differentialgleichungen und eine Darstellung der Airyschen Spannungsfunktion und der Maxwellschen Polyeder und Kräftepläne für Fachwerke mit Einschluß der Nebenspannungen.

Über die vom Verfasser in den Anfangskapiteln gegebene Darstellung der Theorie der Differenzengleichungen ist zu sagen, daß sie tatsächlich das für die bisherige und künftige Anwendung Wesentliche und bisher nicht genügend Bekannte bringt. Insbesondere die Behandlung der Randwertaufgabe mit Hilfe der adjungierten Differenzengleichung und die Näherungsmethoden der Integration und der Kettenbrüche verdienen weitere Anwendungen. Freilich scheint mir die etwas reichliche und abstrakte, an Beispielen nicht genügend ausgearbeitete Indexschreibweise des Verfassers das Eindringen und die Anwendung in der Technik zu erschweren.

Es folgen dann analoge Erörterungen über die Randwertaufgaben bei linearen Differentialgleichungen und die Benutzung der Greenschen Funktionen mit der sehr bemerkenswerten Übereinstimmung des schon immer vom Ingenieur benutzten Einzellastzustandes und der Superposition der Einzellastwirkungen mit der Greenschen Funktion der Differential- und Integralgleichungen. Auch die entsprechende Greensche Funktion der Differenzengleichungen zeigt sich in des Verfassers Darstellung als ein schon lange von den Statikern implicite benutztes Verfahren der Summierung der Einzelwirkungen.

Etwas aus dem Rahmen der Untersuchung fällt die nun folgende Beschreibung der Fixpunktmethode für den durchlaufenden Balken auf mehreren Stützen, deren Zusammenhang mit den analytischen Methoden durch langatmige geometrische Beschreibungen eher verschleiert als verdeutlicht wird. Dieser Darstellungsfehler ist allerdings der ganzen bisherigen Literatur über diesen Gegenstand eigentümlich.

Den zweiten Teil des Buches bildet eine vollkommene Ausnutzung der Airyschen Spannungsfunktion für statisch bestimmte und unbestimmte Fachwerke mit gelenkigen und mit steifen Knotenpunkten, etwa nach den Anschauungen von Klein und Wieghardt, aber in der Methode und im Ergebnis noch über diese hinausgehend.

Wenn natürlich auch das Maxwellsche Spannungspolyeder über die statisch bestimmten Fachwerke und ihre Kräftepläne nichts neues aussagen kann, so scheint doch die geometrische Veranschaulichung der Querkräfte und Biegungsmomente in steif angeschlossenen Stäben durch die Sprünge des Spannungspolyeders, ferner die Ausnutzung der Form und Symmetrie des Spannungspolyeders für die Wahl der statisch unbestimmten Kräfte neue Mittel zu bieten, um schwierige Aufgaben anzusetzen. Die Beispiele des Kreisrings, des kontinuierlichen Balkens und des Rahmenträgers zeigen jedenfalls eine schöne Anpassungsfähigkeit der Methode dieser unstetigen Spannungsfunktion auch an das Castiglianosche Prinzip.

Das Funksche Buch bringt also zwar nur einen gewissen Ausschnitt aus der Statik der Baukonstruktionen, aber gerade die neuerlichen Berührungspunkte zwischen rein mathematischen und rein statischen Behandlungsweisen sind in so übersichtlicher und teilweise neuer Form herausgearbeitet, daß das gegenseitige Verständnis von Mathematiker und Ingenieur vertieft und der weitere Fortschritt gefördert wird. 25

Reißner.

R. GRAMMEL, ord. Professor a. d. techn. Hochsch. Stuttgart, Der Kreisel. Seine Theorie und seine Anwendungen. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1920. X + 350 S., 131 Abb.

Durch das grundlegende Werk über die Theorie des Kreisels von Klein und Sommerfeld, das zu Beginn des Jahrhunderts erschienen ist, wurde zum erstenmal der Bann gebrochen, der bis dahin über fast allen deutschen Lehrbüchern der Mechanik gelastet hatte. Anstelle einer blassen, im Formalen oder rein Rechnerischen sich erschöpfenden Darstellung trat eine anschauliche und vielseitige, vom Interesse und Gefühl für die Sache erfüllte Behandlungsweise, die nicht weniger im theoretischen als im letzten, den technischen Anwendungen gewidmeten, Teil des Werkes zur Geltung kam. Immerhin war das Buch in erster Linie für den Mathematiker geschrieben, und es lag damals wohl auch fern, auf eine größere Leserzahl aus technischen Kreisen zu rechnen. Inzwischen aber hat sich — nicht zuletzt durch die allgemeine Wirksamkeit Kleins — das theoretische Niveau der Ingenieure gehoben, und auch das praktische In-

teresse an den verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten des Kreisels vermehrt. So läßt es sich verstehen, daß G. es jetzt unternimmt, unter Ausscheidung weiter ausgreifender mathematischer Untersuchungen, ein Lehrbuch zu schaffen, das, ein gewisses Gleichgewicht zwischen Theorie und Anwendung einhaltend, sich vorzugsweise an Techniker wendet. Man muß auch sagen, daß der Verfasser im großen Ganzen das Ziel erreicht hat, eine ansprechende, nicht allzu schwer lesbare Einführung in das Gebiet zu geben, die den Techniker über die Grundlagen der Theorie, den Mathematiker über die mannigfaltigen Anwendungen der theoretischen Ergebnisse aufzuklären vermag. Der erste, theoretische, Teil des Buches legt in einer Einleitung die Grundlagen der Stereomechanik dar, bespricht dann in einem ersten Abschnitt die Bewegung des kräftefreien Kreisels, sowohl in der synthetischen, auf Poinsot zurückgehenden, als in der analytischen Gestalt der Eulerschen Gleichungen. Hieran schließt sich eine kurze Erörterung des Einflusses äußerer Kräfte, insbesondere einer Zwangsführung und der Reibung. Es folgt endlich in einem dritten Abschnitt die grundsätzliche Untersuchung der Bewegung des schweren Kreisels, ohne daß näher auf die Natur der elliptischen Integrale eingegangen würde. Im zweiten Teile werden die technischen Anwendungen des Kreisels zweckmäßig in drei Gruppen gegliedert: Vorangestellt wird die gewissermaßen nebensächliche Kreiselwirkung, die an den Rädern von Fahrzeugen oder an sonstigen rotierenden Maschinenteilen zu beobachten ist. Dem gegenüber steht die beabsichtigte Anwendung des Kreisels als Stabilisator, und zwar zunächst in der indirekten Form, bei der ihm nur die Rolle eines Anzeigers oder Auslösers der stabilisierenden Wirkung zufällt, dann in der direkten, bei der der Kreisel einen wesentlichen Teil der wirksamen Masse des Stabilisators ausmacht.

Leider kann man das günstige Urteil, das für die Gesamtanlage und Absicht des Buches gilt, nicht in gleichem Maße auch für die Durchführung im einzelnen aussprechen. Wo der Verfasser von der üblichen Darstellung abweicht, geht er leicht in die Irre. So will er die ihm zu umständlich scheinende analytische Ableitung des Trägheitsellipsoids durch eine „synthetische" ersetzen, benutzt aber dazu den offenbar unrichtigen Satz, daß die lebendige Kraft einer Drehbewegung die Summe der kinetischen Energien ist, die den Komponenten dieser Bewegung zukommen. (Der Satz gilt nur, wenn die Achsen, nach denen zerlegt wird, Hauptachsen sind, und bedarf zu seinem Beweise der Kenntnis eben jener Eigenschaften der Trägheitsmomente, die der Verfasser daraus ableiten will). An manchen Stellen lassen die hervorgehobenen Sätze, in denen die Ergebnisse der einzelnen Paragraphen zusammengefaßt werden, viel an Genauigkeit und Schärfe vermissen. Die Ausführungen des zweiten Teiles würden sicherlich sehr gewinnen, wenn der Verfasser die Fragen, die unmittelbar die Kreiselwirkung betreffen, mehr herauszuarbeiten vermöchte. So ist z. B. im § 17 über schleudernde Scheiben nicht zu verstehen, welchen Zusammenhang mit der Kreiselwirkung die vom Verfasser eingeführte Zusatzkraft Q, durch die die ganze Betrachtung wesentlich kompliziert wird, besitzt.

Sehr anzuerkennen ist das Bestreben des Verfassers nach Sauberkeit des sprachlichen Ausdrucks, und man wird einzelnen der von ihm neu gewählten Ausdrücke wie „Trieb" oder „Schwung" für Impuls bezw. Impulsmoment, Bestand und Verbreitung wünschen. Wir wollen die Hoffnung aussprechen, daß dem Verfasser bald Gelegenheit gegeben sein mag, in der Neubearbeitung einer zweiten Auflage die Mängel der ersten zu verbessern und damit ein Lehrbuch zu schaffen, das von nachhaltigem Einfluß auf die Weiterbildung der wissenschaftlich arbeitenden Ingenieure werden kann. 14

Mises.

ZECH-CRANZ, Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik nebst Auflösungen. In vierter Auflage herausg. von Prof. O. Ritter von Eberhard, Prokurist der Friedr. Krupp A.-G. Stuttgart 1920, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, 300 S.

Die Zechsche Aufgabensammlung entsprach, als sie zum erstenmal 1864 erschien, genau dem, was man damals in Deutschland „theoretische" (nicht „analytische") Mechanik nannte und an den technischen Hochschulen lehrte. Ein munteres Völkchen von materiellen Punkten, unendlich biegsamen Fäden, masselosen Stäben bewegte sich oder blieb in Ruhe unter Einwirkung mehr oder weniger raffinierter Zentralkräfte und ließ sich mit den Newtonschen Gesetzen, mit Schwerpunkts- und Flächensatz, allenfalls noch Energieprinzip, leidlich beherrschen. Wer sich in der Auflösung eingekleideter Gleichungen oder in den Anfangsgründen der Differential- und Integralrechnung üben wollte, kam, wenn er das Zechsche Aufgabenbuch zur Hand nahm, gewiß auf seine Kosten. In den letzten fünfzig Jahren hat sich aber erfreulicherweise die Auffassung von dem, was Mechanik ist, bei uns gründlich geändert und die Herausgeber der späteren Auflagen mußten sich dieser Tatsache durch schrittweise Erweiterung des Aufgabenkreises anpassen. Jetzt ist Herr v. Eberhard, angeregt durch die neueren Lehrbücher, namentlich Hamels ausgezeichnete „Elementare Mechanik", soweit gegangen, selbst die sogen. Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art für allgemeine Koordinaten aufzunehmen. Auch ein Abschnitt über das Rechnen mit Vektoren (der vorletzte des Buches!) und ein besonderer über die Gesetze der Relativbewegung dient der Modernisierung des alten Werkes.

Sieht man sich nun die einzelnen Abschnitte, die jedesmal grundsätzliche Erläuterungen, dann Aufgaben, endlich deren Auflösungen enthalten, näher an, so wird man finden, daß nur die elementarsten ihrem Ge-

genstand einigermaßen gerecht werden. Dies gilt z. B. von den drei ersten (Zusammensetzung von Kräften, Gleichgewicht in der Ebene, Gleichgewicht im Raum), in denen die Erläuterungen wesentlich richtig, die Aufgaben hübsch ausgewählt sind, mit der schon angedeuteten Einschränkung, daß der hauptsächlichste Inhalt der dem Leser zufallenden Arbeit meist ein rechnerischer und nicht mechanischer ist. Ein Beispiel für viele: Aufgabe 6 in Abschnitt III lautet: Ein schweres Dreieck wird in eine Hohlkugel gelegt; was ist seine Gleichgewichtslage? Gemeint ist natürlich eine ebene, sehr dünne Platte von gleichförmiger Massenverteilung und als selbstverständlich ist angenommen, daß die spitzen Ecken dieser Platte ohne Reibung oder Klemmung in der Kugelschale gleiten. Unter dieser Voraussetzung sind die Auflagerkräfte nach dem Kugelmittelpunkt gerichtet, durch diesen muß also auch die Schwerkraft-Resultante hindurchgehen. Der Leser — der die Absicht hatte, in die Statik räumlicher Kräftesysteme einzudringen — wird so vor die langwierige, rein stereometrisch-trigonometrische Aufgabe gestellt, die Lage eines der Gestalt und Größe nach gegebenen, einer Kugel einbeschriebenen Dreieckes zu berechnen und braucht, sobald er diese gelöst hat, nur die Verbindung des Schwerpunktes mit dem Kugelmittelpunkt als Vertikale anzusehen. Übrigens wird im Buche selbst die Frage unvollständig beantwortet, denn außer dem Mittelpunktsabstand des Schwerpunktes bedarf man zur Lagenbestimmung noch der Angabe des Winkels zwischen Dreiecksebene und Vertikale.

Viel tiefliegender und außerhalb allen Bereiches subjektiver Erwägungen sind die Mängel des Buches überall dort, wo wirkliche mechanische Schwierigkeiten zu überwinden wären. Schon die Erläuterungen des Abschnittes IV über den „Grundsatz der virtuellen Verrückungen" sind höchst mangelhaft, aber vollends warnen muß man den Leser vor dem XII. Abschnitt „Von den Prinzipien der Dynamik". Hier werden in den Erläuterungen zum d'Alembertschen Prinzip die Begriffe der äußeren und der eingeprägten Kraft dauernd durcheinandergeworfen, der Ansatz der Newtonschen Gleichungen: Masse mal Beschleunigung = Summe aller Kräfte für jedes Massenelement wird als d'Alembertsches Prinzip, die Addition dieser, nur mit geeigneten Faktoren multiplizierten Gleichungen als das Prinzip der virtuellen Arbeiten bezeichnet, endlich die Behauptung aufgestellt, daß alle „inneren Kräfte, Spannungen, Pressungen u. dgl." in der Gleichung dieses Prinzips fortgelassen werden dürfen. Wenn nachher alle diese Irrtümer bei den Aufgaben und ihren Lösungen keine Rolle spielen, so hat dies seinen sehr einfachen Grund darin, daß von den 9 Aufgaben des mit so weit ausgreifenden Erläuterungen eingeleiteten Abschnittes 8 die Bewegung eines einzelnen (!) materiellen Punktes betreffen (einmal eine kleine Kugel in einer Röhre von Kreisquerschnitt, einmal ein Ring, der über einen Stab geschoben ist, usw.) und nur eine die Bewegung zweier durch einen Faden verbundener Punkte. Derartig kleine Spatzen lassen sich eben auch mit einer schlecht gebauten, schlecht geladenen und schlecht gerichteten Kanone erledigen.

Ein besonders betrübliches Bild bietet gerade dem Techniker der siebente Abschnitt, die Lehre von der Festigkeit. In den Erläuterungen wird das Hookesche Gesetz und die Differentialgleichung der elastischen Linie angegeben. Unter den Aufgaben findet sich folgende: „9. In einer vertikalen Ebene sind zwei gleiche Balken CA und CB aneinandergelehnt, die unteren Enden A und B sind durch eine horizontale Zugstange verbunden, deren Mitte D durch eine vertikale Zugstange mit C in Verbindung steht, und von irgend einem Punkt E auf CD gehen zwei weitere Stangen nach den Mitten F und G von AC und BC. Was sind die vorkommenden Spannungen und Pressungen, wenn man auf AC und BC gleichförmige Belastung annimmt und die Gewichte aller Stangen, mit Ausnahme des Gewichtes von AB vernachlässigt?" Daß die „Spannungen und Pressungen" von den Auflagerbedingungen abhängen, scheint dem Verfasser unbekannt zu sein; aus der Auflösung kann man schließen, daß er sich in A und B horizontale Gleitlager denkt, und auch alle übrigen bestimmenden Eigenschaften des betrachteten Stabsystems kann der Leser nur hinterher aus den Angaben über die Lösung erraten. Die gleiche Fremdheit mit den Verhältnissen und den Problemen der Technik äußert sich in fast allen Aufgaben dieses Abschnittes.

Im Ganzen wird man das Urteil über das vorliegende Werk dahin zusammenfassen müssen, daß die Zeit für eine derartige „theoretische Mechanik" endgültig vorüber ist. Sie genügt nicht den Anforderungen des Theoretikers und läßt den Techniker völlig unbefriedigt. 46 Mises.

Mitteilungen der Preußischen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht, Heft 4: H. **HAHN:** Die Starre. — C. **FISCHER:** Die Schraubenfeder. Quelle & Meyer, Leipzig 1920, 186 S.

Zunächst: Was heißt das, „die Starre"? Der Verfasser, der bestrebt ist, für alle termini technici deutsche Fachausdrücke einzuführen, versteht unter „Starre" den Faktor, der beim Hooke'schen Gesetz elastischer Körper mit der Verlängerung multipliziert werden muß, damit sich die dehnende Kraft ergibt. Um etwas bei der Frage der Verdeutschung zu bleiben: Der Verfasser nennt den Elastizitätsmodul „Dehnmaß", den Schubmodul „Gleitmaß" (wäre nicht Schubmaß besser und Gleitmaß für den Widerstandskoeffizienten zäher Flüssigkeiten zu bewahren?), das Trägheitsmoment „Drehmasse" die kinetische Energie „Wucht", die potentielle Energie „Macht" usw. Klingt sehr gut: „Wucht und Macht zusammen (darf man noch „plus" sagen?) bleiben fest", aber, wenn nun alle diese Worte: Wucht, Macht, Kraft wissenschaftlich festgelegt sind, was bleibt dann noch für die

freie, wissenschaftlich nicht gebundene Sprache übrig? Wird sie nicht ärmer? Erfindet neue Worte, die nicht der Umgangssprache angehören! „Dehnmaß" ist gut und vielleicht gewöhnt man sich auch an „Starre". Ob auch an „Spute" für die Kreisfrequenz?

Nun zum sachlichen Inhalt: Beide Abhandlungen betreffen die Schraubenfeder, die erste Abhandlung ihre Rolle im Unterricht der Mechanik auf der Schule, die zweite Abhandlung die Berechnung der Starre aus der Gestalt und der Materialeigenschaft der Feder. Um mit der zweiten zu beginnen, die auch für den Ingenieur Interesse haben dürfte, so bringt sie mit recht elementaren Mitteln eine Übersicht über die einschlägigen Arbeiten von James Thomson, Perry, Wilberforce, Sommerfeld, Lord Kelvin und Miller. Die Formeln dieser Autoren werden abgeleitet und miteinander verglichen. Besprochen wird noch der Einfluß der Masse der schwingenden Feder selbst und der Einfluß der Dämpfung. Da auch das Beobachtungsmaterial mitgeteilt wird, ist die Arbeit des Herrn Fischer sicher recht wertvoll.

Recht erfreulich im ganzen ist auch die erste Schrift, erfreulich vor allem, daß hier, in einem für Lehrer gedachten Werke, versucht wird, im Anschluß an neuere Untersuchungen über die Grundlagen der Mechanik (Budde, Jaumann und auch mein Lehrbuch der Elementaren Mechanik berücksichtigt der Verfasser ziemlich weitgehend), mit altüberkommenen dogmatischen Vorstellungen der Schulbücher zu brechen und ihre Mechanik auf eine mehr wissenschaftliche Basis zu stellen. Ganz sicher wird die Schule ein stärkeres Gefühl für die Mechanik als eine Wissenschaft von wirklichen Dingen einflößen, wenn sie sich den Massenpunkt abgewöhnt und mit wirklichen Körpern arbeitet, dementsprechend auch räumlich verteilte und flächenhaft verteilte Kräfte unterscheidet. Herr Hahn schließt sich ganz diesem Standpunkt an. Sachgemäß werden auch die Zug- und Druckkräfte gleich mit den Verzerrungen in Verbindung gebracht (Seite 14 oben). Auch den Schlußausführungen des Verfassers, die sich auf die allgemeine Grundlegung der Mechanik beziehen, kann ich voll zustimmen. Ich möchte ganz besonders auf sie aufmerksam machen. Sie sind um so notwendiger, als die starke und aufs einzelne gehende Beschäftigung mit einer Einzelaufgabe leicht die Gesichtsweite beeinträchtigen könnte.

Nun mag aber der Verfasser auch einige kritische Bemerkungen gestatten: Zunächst gegenkritische, da wo er sich mit der Darstellung der Federbewegung in meiner „Elementaren Mechanik" beschäftigt. Mein Buch hat eine strenge Architektur, es ist also bedenklich, einen Teil herauszugreifen und von anderem Standpunkt aus zu betrachten. Der Verfasser oder seine Schüler kennen bereits die Schwerkraft, die Fallbewegung und daher auch die Masse, meine Leser kennen an der in Rede stehenden Stelle weder die Masse noch auch den Kraftbegriff. Beides soll erst geschaffen, vor allen Dingen die Idee der Masse an einem Beispiel, etwa der Federschwingung, entwickelt werden. Bei einer analytisch deduzierenden Methode kann man aus der als bekannt angenommenen Gleichung

$$m x'' = -k x$$

ableiten, daß die Spute $n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ist und diese Beziehung meinetwegen ein Grundgesetz der einfachen Schwingungen nennen, bei meiner synthetisch aufbauenden Methode aber habe ich erst aus Beobachtungen

$$x'' = -n^2 x$$

gewonnen und nun handelt es sich darum, aus weiteren Beobachtungen das n^2 in einen nur vom schwingenden Körper abhängigen Faktor $\frac{1}{m}$ und einen nur von der Feder abhängigen Faktor k zu zerlegen. So wird aus der Beobachtung die Idee der Masse gewonnen. Die Idee, nicht ihre Definition. Dazu ist das Experiment viel zu ungenau. Der Verfasser irrt, wenn er sagt: „Da diese Beziehung $\left(m = \frac{k}{n^2}\right)$ erlaubt, die Masse zu messen, liefert sie auch eine Bestimmung des Begriffes Masse." Nein, eine Messung liefert niemals einen Begriff. Die wissenschaftlichen Begriffe werden rein logisch nur durch die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen definiert (durch ein unabhängiges Axiomensystem) z. B. Masse und Kraft vor allem aus dem Newtonschen Grundsatz $m w = \Sigma k$. Außerdem bestehen von einzelnen Beobachtungen her Ideen über die Beziehung der Begriffe zur Wirklichkeit. Ist dann das wissenschaftliche System aufgebaut, so kann man mit seiner Hilfe die Theorie der Meßapparate entwickeln und nun durch entsprechende Beobachtungen feststellen, wieweit die Begriffe auf die Wirklichkeit anwendbar sind. Erst die Gesamtheit der Theorie und der Beobachtungen legt den Begriff soweit fest, als es überhaupt möglich ist, definiert ihn auch real. Beispiel: Aus den Prinzipien der Mechanik folgt die Theorie der Wage. Aus der Mechanik folgt zusammen mit Beobachtungen das Gesetz der Schwerkraft; Wage und Schwerkraft zusammen, nebst Beobachtungen über die störenden Kräfte (Reibung usw.) gestatten dann erst die Wägung und die Realdefinition der Masse, die zunächst logisch nichts anderes als ein der Materie eigener unveränderlicher Faktor ist, der mit den Kräften in der Wechselbeziehung des Newtonschen Grundgesetzes steht. Aber die Idee der Masse als Trägheitsfaktor kann sehr wohl schon aus einem recht unvollkommenen Experiment, wie dem mit der schwingenden Feder, gewonnen werden.

An anderen Stellen der Schrift Hahns wäre größere Schärfe erwünscht. Seite 14 heißt es: „Eine verzerrte Feder übt nach dem Entlasten eine Kraft aus, die ihre Gestalt wieder herstellt, die Kraft nennen wir Federkraft." Aber das stimmt doch nicht. Eine entlastete Feder übt nach außen gar keine Kraft aus. Ganz unzulässig ist auf Seite 20 und

21 die Darstellung der „Spanner". Wie sich Seite 21 zeigt, meint der Verfasser die beiden Spannkräfte, die zwei durch eine wirkliche oder gedachte Fläche getrennte Körper aufeinander ausüben, er hat den Spannungstensor im Auge; zunächst aber nennt er so die beiden, an den Enden einer Feder auftretenden Kräfte, die wohl in der Ruhe, aber keineswegs in der Bewegung einander entgegengesetzt gleich sind, weil noch ein Körper zwischen ihnen ist. Dieser Gebrauch desselben Wortes für zwei ganz verschiedene Dinge muß sehr verwirrend wirken. Auch ist der Begriff in der Fassung von Seite 20 nicht zum Aufbau der Mechanik verwertbar.

Und nun noch eine Stelle, die mein Bedenken erregt. Seite 48 heißt es: Dort hatte der Schüler erkannt, daß die zurücktreibende Kraft der Feder P gleich $-kx$ ist .... Da der Schüler in der Bewegungslehre bereits gelernt hat, die Kraft, welche die angehängte Masse bewegt, durch das Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung b zu messen, kann er die Kraftgleichung

$$mb = -kx$$

ansetzen."

Nein, das kann er nicht, denn selbst wenn er seine bisherigen Kenntnisse zum allgemeinen Newtonschen Grundgesetz verallgemeinern wollte, so könnte er noch lange nicht wissen, daß auch bei der Bewegung die Kraft $-kx$ ist. Das ist sogar falsch: die Kraft ist wesentlich geringer. Der Verfasser weiß ja auch, daß die Gleichung gar nicht so heißt, sondern genauer

$$(m + {}^1/_3\, m')\, b = -kx,$$

wo m' die Masse der Feder selbst ist. Nun kommt ja nicht irgendwie auf mystischem Wege ein Drittel der Federmasse zu angehängten Masse hinzu, so daß der Fehler in einer Ungenauigkeit der Massenbestimmung läge, sondern in Wahrheit ist die Kraft, welche die Feder nach außen abgibt, geringer. Man müßte eigentlich so schreiben:

$$mb = -kx - P'$$
$$P' \sim {}^1/_3\, m'\, b.$$

Die Sache liegt natürlich ziemlich tief, sie hängt aufs engste mit den Schwierigkeiten des statischen Kraftbegriffes zusammen und mit ähnlichen Schwierigkeiten, die das d'Alembertsche Prinzip selbst guten Büchern bereitet. Ich nehme gleich eine entsprechende anfechtbare Stelle der Fischerschen Abhandlung hinzu. Seite 153 heißt es: „Da ferner äußere Kräfte und das Produkt aus Masse und Beschleunigung nach dem d'Alembertschen Grundsatz wie gleichartige Größen zu behandeln sind, so muß das Produkt $m\ddot{z}$ in jedem Augenblick ebenso groß sein wie die äußere Kraft P, die die Feder in ihrem augenblicklichen Zustand verzerren würde." Hier ist derselbe Fehler wie oben, nur tritt seine Quelle deutlicher hervor: eine falsche Auffassung des d'Alembertschen Prinzips. Auch muß es nicht äußere Kräfte sondern eingeprägte Kräfte heißen. Und im Zusammenhang damit ist das System nicht klar erfaßt. Ohne klaren Systembegriff kein richtiges d'Alembertsches Prinzip. Der Schluß des Satzes ist auch sachlich falsch.

Selbst auf die Gefahr hin, mich zu wiederholen (es steht dies schon alles in meiner Arbeit über die Grundlagen der Mechanik: math. Annalen Bd. 66, Seite 382) möchte ich hier vor weiterem Kreise noch einmal auf die Sache eingehen, denn kein Prinzip der Mechanik wird im Unterricht so schlecht behandelt, wie das d'Alembertsche. Entweder trivialisiert man es: man schreibt nur das Newtonsche Grundgesetz in der Form $\Sigma k - mw = 0$. Das steckt zwar im d'Alembertschen Prinzip mit drin, aber das ist nicht alles. Oder man faßt es falsch auf, wie unsere Autoren (sie sind nicht in schlechter Gesellschaft): Aus einer richtigen statischen Gleichung wird eine richtige kinetische, wenn man die Massenbeschleunigungen von den Kräften abzieht. Das führt zu Fehlern, siehe oben. Das richtige Prinzip, genau so wie d'Alembert es formulierte, heißt: Die Reaktionskräfte (ihr Gegenteil nennt d'Alembert die verlorenen Kräfte) halten sich am System das Gleichgewicht. Oder, da nach Newton die Massenbeschleunigungen gleich der Summe aller Kräfte, also der Summe aus den Reaktionskräften und den eingeprägten Kräften gleich sind: Die eingeprägten Kräfte und die negativen Massenbeschleunigungen halten sich am System zusammen das Gleichgewicht.

Es kommt also auf das System an. Ist das System ein physikalisches (wirkliches), so gibt es keine Reaktionskräfte und das Prinzip wird mit dem Newtonschen Grundgesetz identisch. Man spricht deshalb bei einer Feder am besten gar nicht vom d'Alembertschen Prinzip. Ist aber das System idealisiert (z. B. ein starrer Körper), so liefert das Prinzip Neues, die Bewegungsgleichungen des starren Körpers, die das Newtonsche Prinzip allein nicht geben kann, da es die unbekannten Reaktionen enthält.

Der Übergang von der Statik zur Kinetik ist schwer, weil man damit rechnen muß, daß die Kräfte sich ändern. Darum ist der direkte Aufbau der Kinetik dem aus der Statik entschieden vorzuziehen; und darum paßt auch das Stück aus meinem Buche nicht gut in die Arbeit des Herrn Hahn, so sehr ich ihm auch danke, daß er die Lehrer mit meinem Buche etwas bekannt macht.

Ich habe diesen beiden Abhandlungen mehr Zeilen gewidmet, weil sie sicher nach ihrer Bedeutung einen weiten Weg durch die Lehrerwelt zurücklegen werden. Gerade aber wegen dieser breiten Wirkung scheint es mir notwendig, deutlich auf die Mängel hinzuweisen.

Berlin, den 12. Dezember 1920. 11

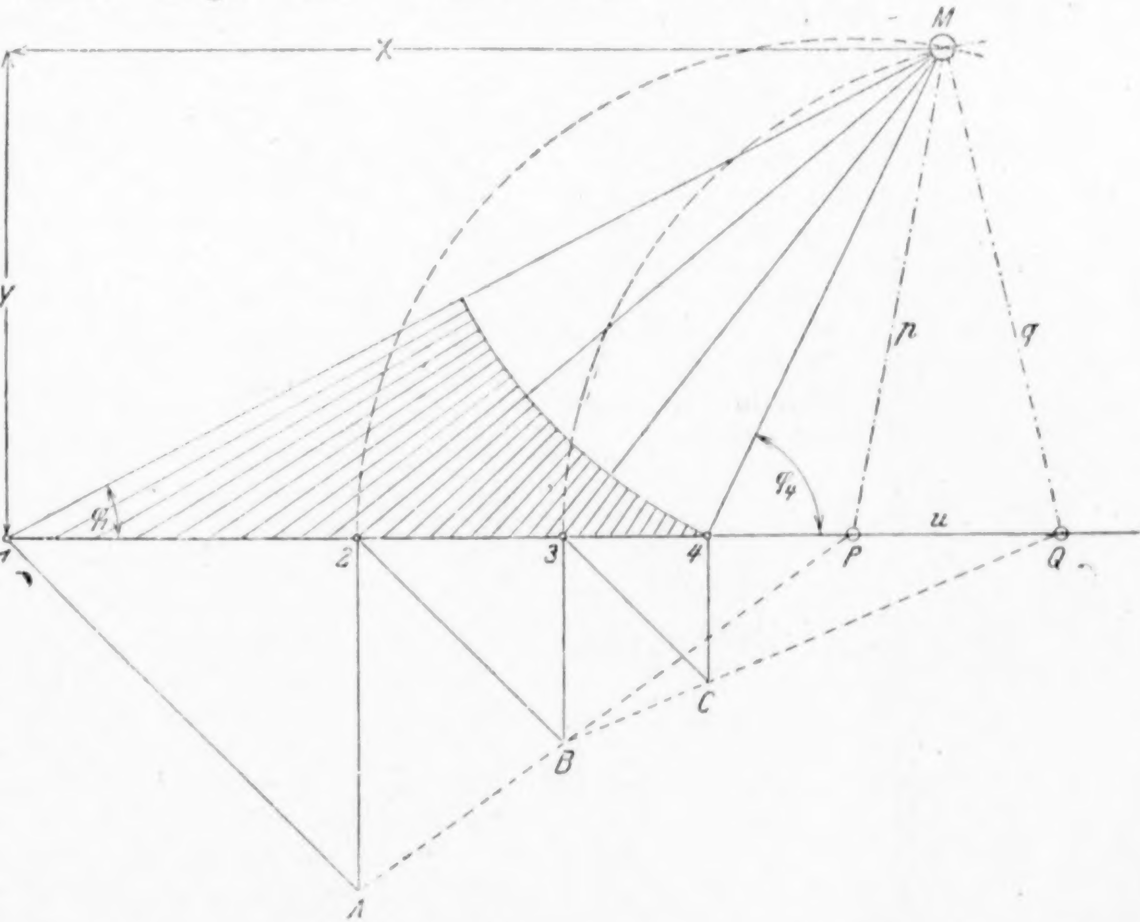
Hamel.

KLEINE MITTEILUNGEN

Unterteilung eines Funktionsmaßstabes. Ein Funktionsmaßstab stellt eine Beziehung zwischen zwei von einander abhängigen veränderlichen Größen in der Weise dar, daß die eine Größe durch eine Strecke s, die andere durch eine ihr zugeordnete Zahl z angegeben wird, indem man für eine Reihe gleichstufig fortschreitender Zahlen z_1, z_2, z_3 .... die entsprechenden Strecken s_1, s_2, s_3 ..., von einem gemeinsamen Anfangspunkte beginnend, durch Maßstabstriche begrenzt und die Zahlen zu den Strichen hinzuschreibt. Das bekannteste Beispiel ist wohl der bei dem Rechenschieber verwendete logarithmische Maßstab, bei welchem z den Numerus, s den Logarithmus bedeutet. Gleichviel, ob, wie hier, die Funktion $s = f(z)$ eine analytische ist, oder ob sie den Ablauf eines Vorganges, etwa eines Experiments, empirisch zum Ausdruck bringt — immer wird man sich mit der gesetzmäßigen Ermittelung einer beschränkten Zahl von Maßstabpunkten begnügen müssen. Soll der Maßstab für beliebige Zwischenwerte nutzbar werden, so muß man eine weitere Unterteilung vornehmen, wozu man sich des folgenden Näherungsverfahrens bedienen kann, welches an dem Beispiel eines logarithmischen Maßstabes dargestellt werden möge. Im nebenstehenden Bild sind die Punkte 1, 2, 3, 4 auf einer Geraden so aufgetragen, daß ihre Abstände von 1 den Logarithmen der Zahlen 1, 2, 3, 4 proportional sind. Gesucht wird die dezimale Unterteilung für log 1,1, log 1,2 usw. bis log 3,9.

Man zeichne zunächst die ähnlichen Dreiecke 1 2 A, 2 3 B und 3 4 C und lege durch A und B eine Gerade bis zum Schnittpunkte P, durch B und C eine Gerade bis zum Schnittpunkte Q. Sodann schlage man um P einen Kreisbogen durch 2, um Q einen Kreisbogen durch 3. Schneiden sich diese Kreisbögen in M, so hat dieser Punkt die Eigenschaft, daß die von M nach 1, 2, 3, 4 gezogenen Strahlen gleiche Winkel mit einander bilden. Wird sodann jeder der drei gleichen Winkel in 10 gleiche Teile geteilt, so ergeben die Schnitte der Teilstrahlen mit der Geraden 1 2 3 4 die gewünschte Unterteilung[1].

Um zu beweisen, daß die drei Winkel einander gleich sind, denke man sich in dem Bild die Strecken 1—2, 2—3, 3—4 mit a, b, c bezeichnet, die Halbierungslote der Strecken a und b sowie die durch P gehende Halbierungsnormale der Strecke $M2$ hinzugefügt und die Schnittpunkte mit F und G bezeichnet. Diese Punkte sind offenbar die Mittelpunkte zweier Kreise durch M, von denen der eine durch 1 und 2, der andere durch 2 und 3 geht. Verbindet man noch F mit 1 und 2, G mit 2 und 3, so erhält man zwei gleichschenklige Dreiecke 1 2 F und 2 3 G, welche ähnlich sind, weil sich ihre Höhen verhalten wie die Grundlinien a und b, deren Winkel bei F und G daher einander gleich sind. Da diese Winkel Zentriwinkel in den Kreisen um F und G sind, die Winkel 1 M 2 und 2 M 3 aber Peripheriewinkel über denselben Sehnen a bezw. b, so müssen auch diese einander gleich sein. Verbindet man noch G mit Q, so ist GQ die Halbierungsnormale der Strecke M 3 und schneidet das Halbierungslot der Strecke c in H, dem Mittelpunkt eines durch die Punkte 3 4 M gehenden Kreises, dessen Zentriwinkel 3 H 4 ebenso groß ist wie 1 F 2 und 2 G 3, woraus folgt, daß auch 3 M 4 = 1 M 2 = 2 M 3 ist.



Die in dem Bild mit X und Y bezeichneten Koordinaten des Punktes M kann man leicht durch Rechnung kontrollieren. Für die Seiten des Dreiecks PMQ findet man zunächst:

$$p = \frac{ab}{a-b}, \qquad q = \frac{bc}{b-c}, \qquad u = b + q - p$$

und für die Koordinaten:

[1] Dieselbe Aufgabe löst R. Mehmke in anderer Weise, Zeitschr. Ver deutsch. Ing., 1889, S. 583.

$$X = a + p + \frac{p^2 + u^2 - q^2}{2u},$$

$$Y = \sqrt{p^2 - \left(\frac{p^2 + u^2 - q^2}{2u}\right)^2}.$$

Weiter folgt sodann:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{Y}{X}, \qquad \operatorname{tang} \varphi_4 = \frac{Y}{X - a - b - c}$$

sowie für die Abszisse eines dem $\log n$ entsprechenden Teilpunktes

$$x_n = X - Y \operatorname{cotg} \varphi_n,$$

$$\text{wenn } \varphi_n = \varphi_1 + \frac{n-1}{3} (\varphi_4 - \varphi_1) \text{ ist.}$$

Wäre die Konstruktion geometrisch genau, so müßte für unser Beispiel $x_n = \log n$ sein. Im allgemeinen wird ein kleiner Fehler f vorhanden sein, dessen Größe sich aus der Gleichung

$$f = \log n - x_n$$

ergibt und dessen Verlauf man durch eine Fehlerkurve mit der Abszisse x_n oder $\log n$ und der Ordinate $50 f$ oder $100 f$ veranschaulichen kann.

Dieser theoretische Fehler ist natürlich zu unterscheiden von dem wirklichen Fehler, der um den Betrag des Zeichenfehlers kleiner oder größer sein kann als f. Abgesehen von dem Zeichenfehler, dessen Größe von der Genauigkeit des Zeichengeräts und der Geschicklichkeit des Zeichners abhängt, ist die Näherung eine sehr befriedigende. Für die Strecke 2—3 ist sie am größten. Hier bleibt der Fehler unter 0,0004 der logarithmischen Einheit, während er für die Strecke 1—2 etwa 0,0015 erreicht. Zur Erzielung der größtmöglichen Genauigkeit wird es sich daher empfehlen, immer nur jeweils die mittleren Strecken zu unterteilen, hier also die Strecke 2—3 von M aus, für die Strecke 3—4 aber einen neuen Punkt M für die Teilpunkte 2, 3, 4, 5 zu benutzen usw.

Mit Hilfe der Unterteilung kann man aus der Funktionsskala eine Funktionskurve entwickeln, die in der Regel genauer ausfallen wird, als wenn man nach Auftragung der gesetzmäßig ermittelten Punkte diese mittels Kurvenlineal verbinden würde.

Das vorstehend beschriebene Verfahren versagt offenbar, wenn die beiden Kreise um P und Q keinen Schnittpunkt ergeben, d. h. wenn der eine vollständig in dem andern liegt. Aber auch für solche Fälle kann ein Punkt M angegeben werden, der eine näherungsweise richtige Unterteilung ermöglicht. Denkt man sich die Abstände der vier Punkte 1 2 3 4 proportional verkleinert, so rücken auch die Punkte P und Q näher aneinander, um schließlich zusammen zu fallen, wenn jene Abstände unendlich klein werden. Dann wird auch $q = p$, und aus den zwei Kreisen mit diesen Radien wird einer. Der Punkt M liegt immer noch auf diesem Kreise, außerdem aber auf einem in P errichteten Lot. Als Näherung ergibt sich hieraus die folgende Regel für den der Strecke 2—3 entsprechenden Punkt M: Man fasse statt p die Strecke vom Mittelpunkte der Strecke 2—3 bis zum Mittelpunkte der Strecke PQ in den Zirkel und schlage einen Viertelkreis um letzteren. Der höchste Punkt dieses Kreises ist der gesuchte Punkt M.

Während die Radien p und q bei empirisch geteilten Maßstäben nur durch Konstruktion oder aus den Gleichungen $p = \frac{ab}{a-b}$ und $q = \frac{bc}{b-c}$ gefunden werden können, ergibt sich, wenn $s = f(z)$ eine analytische Funktion ist, im Grenzfalle unendlich kleiner a und b für p ein analytischer Näherungs-Ausdruck.

Offenbar ist nämlich im Grenzfalle, wenn dz konstant bleibt,

$$a = \frac{\partial s}{\partial z} dz,$$

$$b - a = \frac{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial z} dz\right)}{\partial z} dz = \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} (dz)^2,$$

zu setzen, sonach

$$p = \frac{ab}{a-b} = \frac{\frac{\partial s}{\partial z} dz \left[\frac{\partial s}{\partial z} dz + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} (dz)^2\right]}{-\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} (dz)^2}$$

oder, da $(dz)^3$ gegenüber $(dz)^2$ verschwindet,

$$p = -\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2}{\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}}.$$

Beispielsweise erhielte man für $s = \log z = \log e \cdot \ln z$:

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \log e \frac{1}{z}, \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = -\log e \frac{1}{z^2},$$

$$p = \log e = 0{,}4343.$$

Für $s = \sin z$ erhält man:

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \cos z, \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = -\sin z,$$

$$p = \frac{\cos^2 z}{\sin z}.$$

Eine Anwendung kann das Verfahren auch finden, wenn s den Weg eines Schiebers darstellt, dessen Stellung so auf den Drehzeiger eines Meßinstruments übertragen werden soll, daß innerhalb gewisser Grenzen die Zeigerbewegung eine von s abhängige Größe z mit gleichstufigen Intervallen darstellt. 28

E. A. Brauer.

Über eine neue Art von Rechentafeln. Eine Rechentafel mit parallelen Skalen stellt im Falle linearer Teilung eine Summationstafel, im Falle logarithmischer Teilung eine Multiplikationstafel vor. Verwickeltere Gleichungsformen bedingen im allgemeinen die Anwendung von nichtlinearen bezw. krummlinigen Skalen, die die Herstellung der Rechen-

tafel erschweren. Wir wollen hier zeigen, wie man durch eine besondere Art des Überganges zwischen den einfachen Systemen, in welche die Gleichung zerlegt wird, zu neuen Gleichungsformen gelangen kann, die sich mit Hilfe von leicht konstruierbaren Rechentafeln **mit parallelen logarithmischen Skalen** lösen lassen.

Eine Rechentafel mit drei parallelen logarithmischen Skalen, ermöglicht, wie bekannt[1]), die Lösung einer Gleichung von der Form.

$$\Phi(t, u, v) = t^{\alpha} u^{\beta} - v = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

Schreibt man nämlich (1) in Determinantenform mit $\alpha = a - c$, $\beta = c - b$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} a \log t & 1 \\ b \log u & 1 \\ c \log v & 1 \end{vmatrix} = a \log \frac{u}{v} - b \log \frac{t}{v} + c \log \frac{t}{u} = 0, \quad (2)$$

$$\text{also} \quad v^{b-a} = t^{b-c} u^{c-a}, \qquad v = t^{\alpha} u^{\beta}.$$

Das Nullwerden der Determinante (2) bedeutet aber, daß die drei Punkte mit den Abszissen a, b, c und den Ordinaten $\log t$, $\log u$, $\log v$ auf einer Geraden liegen.

Wird die Anzahl der Veränderlichen auf vier vergrößert, so ist die vierte Veränderliche in das bisherige System durch eine zweite Determinante einzuführen. Die diesem Falle entsprechende Gleichung

$$\Phi(t, u, v, w) = t^{\alpha} u^{\beta} v^{\gamma} - w = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

ist durch die zwei Determinanten

$$\begin{vmatrix} a \log t & 1 \\ b \log u & 1 \\ c \log v\,w & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} c \log v\,w & 1 \\ d \log v & 1 \\ e \log w & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

vollständig ersetzt; dabei wäre der Zusammenhang der Konstanten a bis e noch näher festzustellen, worauf hier nicht eingegangen werden soll. Die Rechentafel wird aus 5 parallelen Geraden bestehen, von denen 4, und zwar diejenigen für t, u, v und w, Skalen enthalten; die Gerade für $v\,w$ ist eine Hilfslinie ohne Teilung. Der Gang der Rechnung geht aus Abb. 1

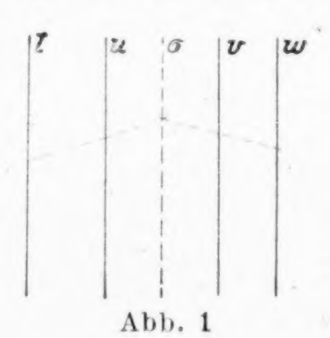


Abb. 1

hervor, die wir Schema der Rechentafel nennen wollen: die Verbindungslinien der Punkte, die den Werten von t, u resp. v, w entsprechen, schneiden sich auf der Hilfslinie σ. Aus drei gegebenen Werten von den t, u, v oder w kann so immer der vierte Wert gefunden werden. Ein ähnliches Schema wäre für eine Gleichung mit fünf (und mehr) Veränderlichen aufzustellen, was einer Transformation der Gleichung auf drei (und mehr) Determinanten entsprechen würde.

Der Übergang zwischen den durch die einzelnen Determinanten gegebenen Systemen wird dabei immer auf die möglichst einfachste Art, d. h. mittelst einer Hilfslinie ohne Teilung bewirkt. Es soll jetzt gezeigt werden, wie man durch Einführung einer anderen Art des Überganges zwischen den einzelnen Systemen zu einer anderen Form von Gleichungen gelangt.

Die Gleichung

$$v = t^{\alpha} u^{\beta} + t^{\gamma} u^{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

kann geschrieben werden in der Form

$$\log v = \log t^{\alpha} u^{\beta} + \log\left(t^{\gamma-\alpha} u^{\delta-\beta} + 1\right). \quad (6)$$

Setzt man

$$\log A = \log t^{\gamma-\alpha} + \log u^{\delta-\beta} \quad . \quad . \quad (7)$$

$$B = A + 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

so hat man die gegebene Gl. (5) in zwei Systeme (6) und (7) zerlegt, zwischen denen der Übergang nach (8) durchzuführen ist. Die Transformation der Gleichungen (6) und (7) auf die Determinantenform bietet keine Schwierigkeit, und es kann sofort das Schema der die Gl. (5) lösenden Rechentafel entworfen werden (Abb. 2). Durch die Skalen t, u, A

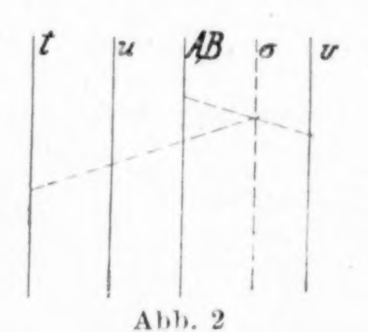


Abb. 2

wird die Gl. (7) gelöst. Die Gl. (6) erhält vier Veränderlichen t, u, B und v, und erfordert daher eine Hilfslinie σ zu ihrer Lösung. In Abb. 2 ist eine einzige Skala für A und B eingezeichnet; die Tafel könnte aber auch zwei einzelne Skalen für A und B enthalten. Der Übergang von A zu B geschieht nach Gl. (8) durch Zuzählung einer Einheit zum abgelesenen Wert von A. Der Gang der Rechnung ist der folgende: man verbindet die den Werten von t und u entsprechenden Punkte, und die Verbindungslinie ergibt auf der Skala (A, B) den Wert A. Dieselbe Verbindungslinie bestimmt auf der Hilfslinie σ einen Punkt, den man mit dem Punkte B, der um eine Einheit höher als A liegt, zu verbinden hat. Die Verbindungslinie ergibt auf der v-Skala den gesuchten Wert von v.

Betrachtet man die etwas allgemeinere Form der Gl. (5)

$$v = c_1 t^{\alpha} u^{\beta} + c_2 t^{\gamma} u^{\delta} \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

wobei c_1 und c_2 Konstanten sind, so bietet für die oben angedeutete Zerlegung der Fall gleicher Vorzeichen von c_1 und c_2 keine Schwierigkeiten. Sind dagegen die Vorzeichen verschieden, so gelangt man zur Übergangsglei-

[1]) Vgl z B. d'Ocagne: Calcul graphique et nomographie, Paris 1908, S. 223. — Pirani: Sammlung Göschen, Bd. 728, S 74. — Schilling: Ueber die Nomographie von d'Ocagne Leipzig 1917, S. 23.

chung $B = A - 1$, und es darf aus praktischen Gründen nicht A sehr nahe 1 werden. Die Gleichungen, für die $\frac{c_2}{c_1} t^{\gamma-\alpha} \sim u^{-(\delta-\beta)}$ sein kann, wären daher für gewisse Gebiete der Veränderlichen durch unsere Rechentafel nicht lösbar. Da aber für diese Gebiete die Näherungsgleichung $v \sim 0$ besteht, so genügt es, der Rechentafel eine entsprechende Anmerkung zuzufügen.

Beispiele:

1. Helligkeit einer beleuchteten Fläche.

$$H = \frac{10^6 z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

(H = Helligkeit in **Lux** eines wagerechten Flächenelementes, das durch eine allseitig symmetrische Lichtquelle von 100 Normalkerzen beleuchtet wird, x = die wagerechte, z = die vertikale Entfernung des Flächenelementes von der Lichtquelle.) Diese Gleichung wurde von Mehmke nomographisch gelöst[1], und zwar erhält eine nach dem üblichen Verfahren konstruierte Rechentafel zwei nichtlineare gerade Skalen für x und H und eine krummlinige Skala für z.

Nach der oben angegebenen Methode kann die Gleichung wie folgt zerlegt werden:

$$\log H = 6 + \log z - {}^3/_2 \log (x^2 + z^2),$$

$$6 - \log H = 2 \log z + {}^3/_2 \log \left(\frac{x^2}{z^2} + 1\right)$$

$$6 - \log H = 2 \log z + {}^3/_2 \log B \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\log A = \log x^2 - \log z^2 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$B = A + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

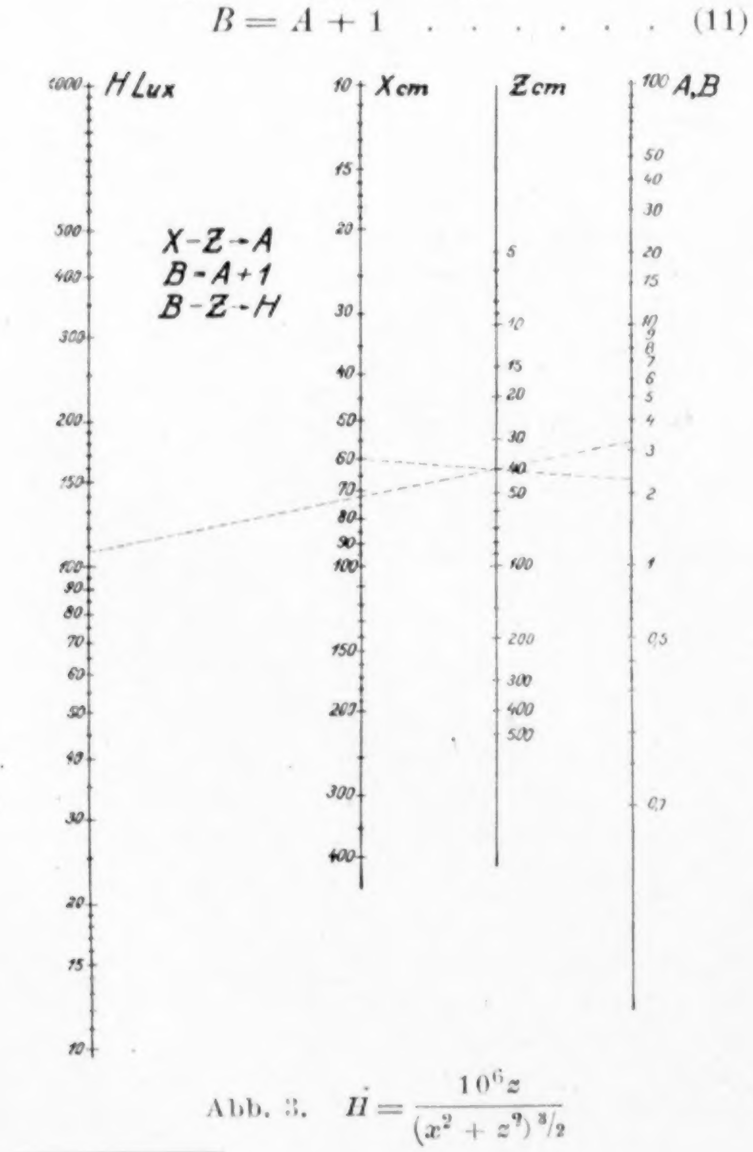


Abb. 3. $H = \frac{10^6 z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$

[1]) Pirani, a. a. O., S. 107.

Zur Lösung der beiden Systeme (10) und (11) wurden die vier Skalen x, z und H konstruiert (Abb. 3). Verbindet man die gegebenen Werte von x und z, so bestimmt die Verbindungslinie den Wert A. Der abgelesene Wert von A ist um eine Einheit zu vergrößern, wodurch man B erhält. Die Verbindungslinie der Werte B und z bestimmt den gesuchten Wert von H. Diese Art der Rechnung drücken wir aus durch:

$$x - z \rightarrow A$$
$$B = A + 1$$
$$B - z \rightarrow H.$$

In Abb. 3 sind die dem Fall $x = 60$, $z = 40$ entsprechenden Verbindungslinien eingetragen, die $H = 107$ ergeben[2]).

2. Brennstoffverbrauch eines Kessels.

$$H = 0{,}00277 \left(\frac{U}{R}\right)^2 + 0{,}6\, U^{0,4}$$

(Formel von Reiche[3]), in welcher bedeutet: H = Höhe der Schornsteinmündung über dem Rost in m, R = gesamte Rostfläche der Kesselanlage in m², U = die von der Kesselanlage verzehrte Brennstoffmenge in kg/h.) Setzt man der Kürze halber $0{,}00277 = a$, $0{,}6 = b$, so kann die Gleichung wie folgt zerlegt werden:

$$\log H = \log b\, U^{0,4} + \log \left(\frac{a}{b}\, U^{1,6} R^{-2} + 1\right)$$
$$= \log b\, U^{0,4} + \log B$$
$$\log A = \log \frac{a}{b}\, U^{1,6} R^{-2}$$
$$B = A + 1\,.$$

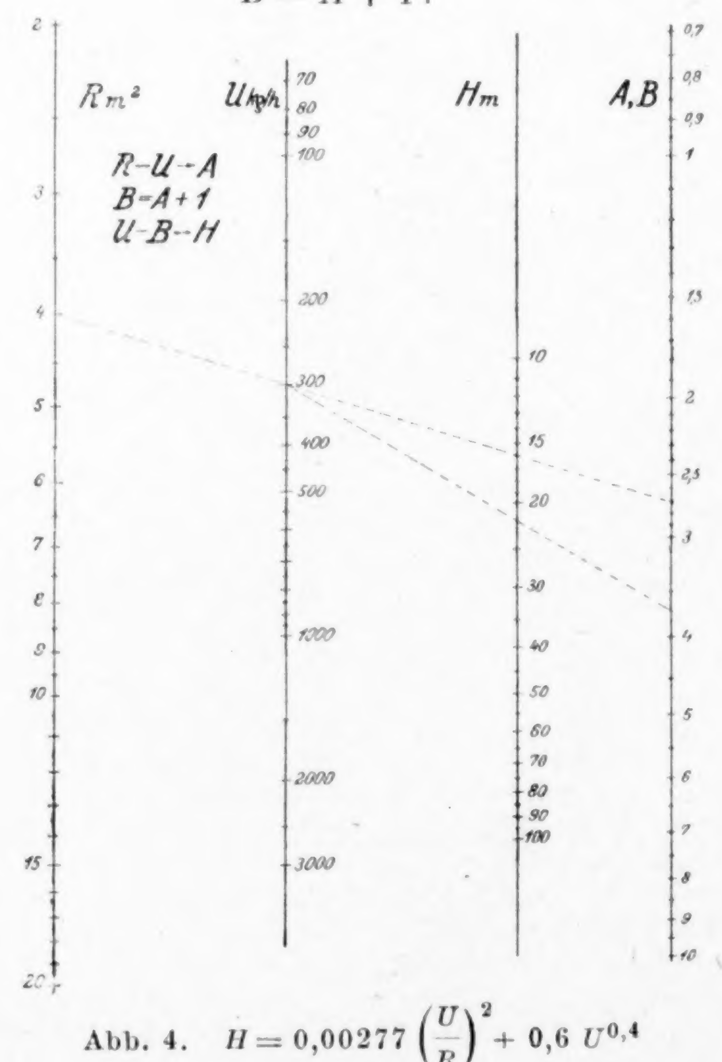


Abb. 4. $H = 0{,}00277 \left(\frac{U}{R}\right)^2 + 0{,}6\, U^{0,4}$

[1]) Alle Abbildungen sind stark verkleinert; daher wurden die Zwischenteilungen der einzelnen Skalen weggelassen.

[2]) Reiche: Anlage und Betrieb von Dampfkesseln, 3. Aufl., Leipzig 1888, S. 57.

Die zur Lösung dieser Gleichungen konstruierte Rechentafel ist in Abb. 4 wiedergegeben. Die Rechnungsart ist angegeben durch:

$$R - U \rightarrow A$$
$$B = A + 1$$
$$B - U \rightarrow H.$$

Die in der Abb. 4 eingezeichneten Verbindungslinien liefern für $R = 4$, $U = 300$ den gesuchten Wert $H = 22$.

3. Ideelles Biegungsmoment.

$$M_i = 0{,}35\, M_x + 0{,}65 \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

(M_i = ideelles Biegungsmoment, M_x = Biegungsmoment, M_y = Drehmoment.) Setzt man $0{,}35 = a$, $0{,}65 = b$, so kann geschrieben werden:

$$\log M_i = \log a M_x + \log\left(1 + \frac{a}{b}\sqrt{1 + \left(\frac{M_y}{M_x}\right)^2}\right)$$

$$= \log a M_x + \log B \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

$$B = A + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\log A = \log\frac{b}{a} + {}^1\!/_2 \log\left(1 + \left(\frac{M_y}{M_x}\right)^2\right)$$

Da der Ausdruck für A nicht einfach gelöst werden kann, muß man weitere Hilfswerte C und D einführen, die aber, wie weiter gezeigt wird, teilweise nur zur Konstruktion der Rechentafel dienen werden:

$$\log A = \log\frac{b}{a} + {}^1\!/_2 \log C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$C = D + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\log D = \log\left(\frac{M_y}{M_x}\right)^2 = 2 \log M_y - 2 \log M_x \quad (16)$$

Die Konstruktion ist im Schema Abb. 5 angegeben. Durch Verbindung der Werte M_x und M_y erhält man nach Gl. (16) auf der Skala (C, D) den Wert D. Wird derselbe um eine Einheit vergrößert, so gelangt man nach

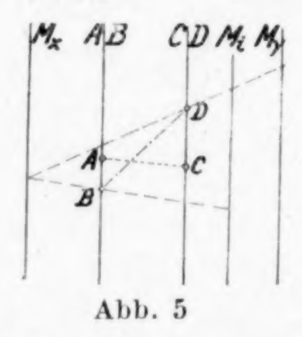


Abb. 5

Gl. (15) zu C. Die Skalen für (C, D) und (A, B) sind so gewählt, daß man durch Projektion des Punktes C in einer bestimmten Richtung auf die Skala (A, B) den Wert $\frac{a}{b}\sqrt{C}$ erhält, d. h. die Skala für (A, B) ist doppelt so groß als die Skala für (C, D) und die Projektion geschieht in der Richtung der Verbindungslinie des Punktes 1 der Skala (C, D) mit dem Punkte $\frac{b}{a}$ der Skala (A, B). Man erhält also durch die Projektion den Wert A nach Gl. (14), welcher nach Gl. (13) um eine Einheit zu vergrößern ist, um B zu gewinnen. Werden die Punkte D und B direkt verbunden, so erhält man durch wiederholte Anwendung der beschriebenen Konstruktion eine Anzahl von Richtungslinien, welche in Abb. 6 ersichtlich sind. Mit Hilfe derselben kann direkt und mit genügender Genauigkeit der zum Punkte D gehörige Punkt B gefunden werden, so daß der Gang der Rechnung ausgedrückt werden kann durch:

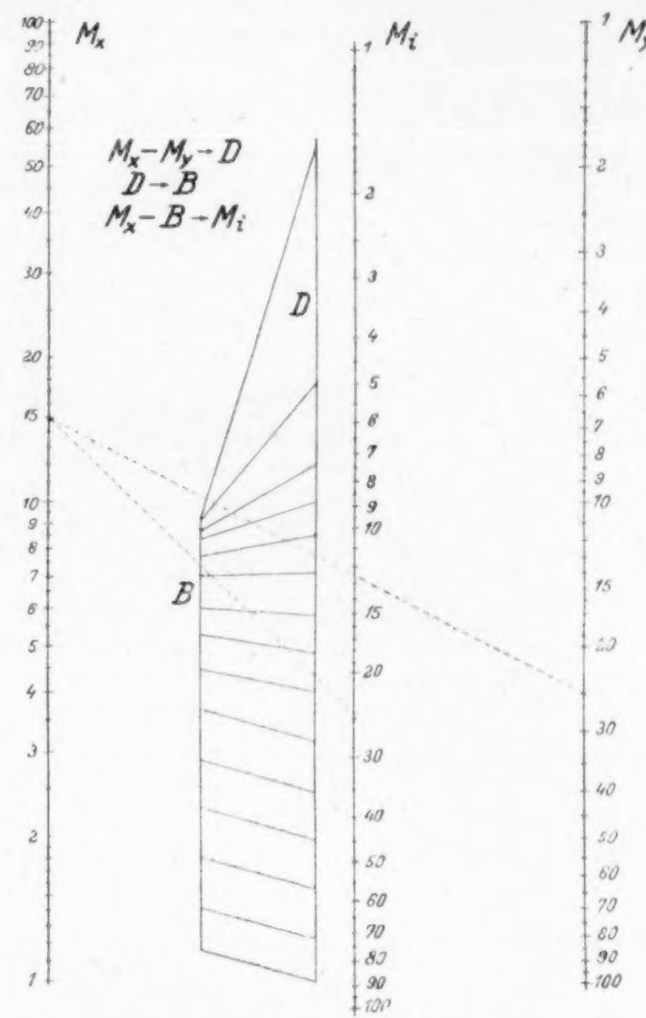


Abb. 6. $M_i = 0{,}35\, M_x + 0{,}65 \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$

$$M_x - M_y \rightarrow D$$
$$D \rightarrow B$$
$$M_x - B \rightarrow M_i.$$

Die in der Abb. 6 eingezeichneten Verbindungslinien entsprechen dem Fall $M_x = M_y = 25$, für welchen sich $M_i = 24{,}2$ ergibt.

J. Hak. 35

Entscheidender Fortschritt in der Lehre vom Atombau. Die englische Zeitschrift „Nature“ veröffentlicht in ihrem letzten Heft (24. März, Bd. 107, 1921, S. 104) einen Brief des berühmten dänischen Physikers Niels Bohr, der das Interesse der weitesten Kreise in Anspruch nehmen muß, da er zweifellos die gesamte Forschung auf dem Gebiete des Atombaus in der nächsten Zeit entscheidend beeinflussen wird. Auch der Ingenieur, der innerhalb der Aufgaben seines Berufes heute noch mit den Begriffen und Formeln der „klassischen“ Mechanik und Elektrodynamik auskommt, wird sich der Kenntnisnahme einer Entwicklung nicht völlig verschließen dürfen, die einmal, wenn auch voraussichtlich erst in späterer Zukunft, geeignet sein könnte, in praktische Fragestellungen einzugreifen. Denn alle modernen Abweichungen von den klassischen Newton-Maxwell-Hertzschen Auf-

fassungen, die Relativitätstheorie sowohl wie die Quantentheorie, verdanken ihr Entstehen in erster Linie dem unabweisbaren, für den Techniker ebenso wie für den Physiker maßgebenden Bestreben, die theoretischen Bilder der Tatsachen mit ihrem beobachteten Ablauf in vollständigere und genauere Uebereinstimmung zu bringen.

Bekanntlich ist man in den letzten Jahren durch zwingende Schlüsse aus der Beobachtung verschiedener Erscheinungsreihen zu folgendem Bild vom inneren Aufbau der Materie geführt worden.[1]) Jedes Atom eines Körpers besteht zunächst aus einem zentralen Kern, der nahezu die gesamte Masse des Atoms und eine bestimmte Anzahl positiv-elektrischer Ladungseinheiten enthält; dann aus einer Reihe (negativ geladener) Elektronen von äußerst geringer Masse, deren Zahl gleich der der Kernladungseinheiten ist und die den Kern, wie die Planeten die Sonne, in gewissen Bahnen umkreisen. Den aufeinanderfolgenden Zahlen 1, 2, 3 usf. bis 92 entsprechen die Atome der verschiedenen Elemente derart, daß jedesmal die Zahl der Ladungseinheiten und Elektronen gleich der Ordnungsziffer, das Atomgewicht gleich oder nahezu gleich dem Doppelten dieser Ziffer ist. Die Reihe beginnt mit dem leichtesten Element, dem Wasserstoff, dessen Atom aus einem einfach geladenen Kern und einem Elektron besteht, und schreitet parallel der Atomgewichtstafel bis zu den schwersten Elementen fort. Ein wesentlicher, von Bohr 1913 gefundener Zug dieses Bildes liegt nun darin, daß die stationären Bahnen der einzelnen Elektronen nicht etwa stetig variieren können, sondern ganz bestimmte Bewegungsmöglichkeiten dadurch als stabile ausgezeichnet sind, daß bei ihnen das Impulsmoment (Moment der Bewegungsgröße) des Elektrons ein ganzzahliges Vielfaches des Planckschen Wirkungsquants ist. Die einzelnen Atome desselben Stoffes sind untereinander nicht völlig gleich, sondern verteilen sich nach statistischen Gesetzmäßigkeiten auf die verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten der Elektronen, also auf die verschiedenen Quantenzahlen ihrer Bahnen. Ebenfalls statistisch geregelt ist der Uebertritt oder Sprung eines Elektrons aus einer möglichen Bahn in eine andere, d. h. es besteht eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Zeiteinheit ein Elektron aus einer bestimmten Bahn in eine andere bestimmte Bahn überspringt, und diese Wahrscheinlichkeit hängt nur von den beiden Bahnen, also den beiden Quantenzahlen, ab. Jeder derartige Sprung, bei dem die Energie sich vermindert, bedeutet eine Energieausstrahlung oder eine Strahlungsemmission, und zwar entspricht einem Uebergang zwischen zwei bestimmten Bahnen eine Strahlung von ganz bestimmter Frequenz (Wellenlänge, Farbe), die wieder nur von den beiden Quantenzahlen abhängt. Das gesamte von einem Körper ausgesandte Spektrum ist mithin, was das Vorhandensein einzelner Spektrallinien betrifft, von den Möglichkeiten der Uebergänge, was die Intensität angeht, von deren Wahrscheinlichkeit bestimmt.

Auf dieser Grundlage war es Bohr und Sommerfeld tatsächlich gelungen, das Spektrum des Wasserstoffes in allen seinen Feinheiten restlos aufzuklären. Auch die wasserstoffähnlichen Spektra der leichteren Elemente erwiesen sich dieser Theorie mehr oder weniger zugänglich. Nun aber blieb die offene Frage: Wie sehen die komplizierten Atome der schwereren Elemente im Normalzustande aus, wie sind die Planet-Elektronen angeordnet und wie verlaufen ihre stationären Bahnen?

Einen ausschlaggebenden Anhaltspunkt für die Beantwortung dieser Fragen gewann man aus den Eigenschaften der chemischen Elemente, die in ihrem periodischen System zum Ausdruck kommen. Bekanntlich wiederholen sich, wenn man die Elemente in der vorhin erklärten Reihenfolge ihrer Atomnummern aufzählt, gewisse chemische und physikalische Eigenschaften, insbesondere Wertigkeit und Elektroaffinität, in Perioden bestimmter Länge, und zwar umfaßt die erste Periode 2 Elemente, dann folgen Perioden zu 8, 8, 18, 18 und 32. Man versuchte es zunächst mit der einfachen Annahme, daß die ersten beiden Elektronen eines jeden schwereren Elementes auf einem innersten Ring um den Kern kreisen, die nächsten acht auf einem zweiten, und daß so beim Eintritt in die höheren Perioden immer neue Ringe mit bestimmten Höchstzahlen von Elektronen zuwachsen. Eine allgemeinere Auffassung war die, daß die verschiedenen Elektronen sich auf konzentrischen Schalen von Polyedersymmetrie bewegen. Allein diesen Theorien waren rechte Erfolge nicht beschieden und sie hingen auch sozusagen in der Luft, weil man keine Vorstellung darüber gewinnen konnte, warum gerade diese Bahnen der Elektronen sich stabil erhalten, noch weniger darüber, wie ein solches Atom entsteht.

Niels Bohr teilt nun mit, daß es ihm gelungen sei, alle diese Schwierigkeiten zu überwinden. Sein Hauptergebnis geht dahin, daß die einzelnen Elektronengruppen, die im großen Ganzen den einzelnen Perioden des natürlichen Systems entsprechen, nicht auf völlig von einander getrennten Schalen oder Ringen laufen, sondern vielfach miteinander verschlungene Bahnen beschreiben. Die ersten beiden Elektronen, die durch einen Kern gebunden werden, bewegen sich tatsächlich auf einquantigen Bahnen vom Typus der gewöhnlichen Planetenbahnen (Ellipsen, in deren einem Brennpunkt der Atomkern steht). Die Achtergruppen von Elektronen zerfallen in je zwei Untergruppen

---

[1]) Vgl. etwa den Vortrag von R. v. Mises, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1920, S. 687 ff. Eingehende Darstellung in dem Lehrbuch von A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 2. Aufl., Braunschweig 1921.

zu je vier, wobei jeder dieser Untergruppen ein anderer Typus von zweiquantigen Bahnen entspricht, den Achtzehnergruppen sind je drei Typen von verschiedenen Dreiquantbahnen zugeordnet usf. Die höherquantigen Bahnen nähern sich dabei streckenweise dem Kern mehr als die niederqantigen, verlaufen aber im allgemeinen außerhalb der letzteren. Dieser innigen Durchdringung der Bahnen entsprechend stellt die neue Bohrsche Theorie die gegenseitigen Einwirkungen der Elektronen verschiedener Gruppen aufeinander in Rechnung und eben dieser Umstand führt zur Aufklärung der Stabilitätsverhältnisse.

Für die Anordnung der Elektronen in den 6 Edelgasen, die gewissermaßen die Marksteine an den Enden der 6 Perioden bilden, gibt Bohr folgende Uebersicht:

Helium	2_1	Krypton	$2_1\ 8_2\ 18_3\ 8_2$
Neon	$2_1\ 8_2$	Xenon	$2_1\ 8_2\ 18_3\ 18_3\ 8_2$
Argon	$2_1\ 8_2\ 8_2$	Niton	$2_1\ 8_2\ 18_3\ 32_4\ 18_3\ 8_2$

Das bedeutet, daß z. B. beim Krypton zuerst zwei Elektronen auf einquantigen, dann acht auf inneren zweiquantigen Bahnen laufen, dann achtzehn auf dreiquantigen, endlich wieder acht auf äußeren Zweiquantbahnen. Die Edelgase, deren Elektronengruppen vollständig sind, weisen ein besonders hohes Maß von Stabilität auf, sodaß es schwer ist, ihrem Atom ein Elektron anzulagern oder eines aus ihm zu entfernen — was den chemisch inaktiven Charakter der Edelgase erklärt. Analog beruht der elektronegative Charakter der den Edelgasen unmittelbar vorhergehenden Familie auf dem Bedürfnis des Atoms, ein Elektron, das in der äußersten Gruppe fehlt, anzulagern, während die den Edelgasen folgenden elektropositiven Elemente gerne ein Elektron loswerden wollen. Schließlich bietet die Kenntnis der Konfigurationen der Elektronen und das nähere Studium der mit der Entfernung eines Elektrons aus dem Atomverband verknüpften Vorgänge eine Grundlage für eine ins einzelne gehende Erklärung der Röntgen-Spektra. In weiterer Ferne erblickt man sogar die Möglichkeit, die charakteristischen magnetischen Eigenschaften der verschiedenen Körper zu deuten.

In der kurzen vorläufigen Mitteilung Bohrs werden naturgemäß nur die Resultate seiner tiefgreifenden Untersuchungen angegeben. Er betrachtet das Atom in seiner Entstehung, indem er an den Kern ein Elektron nach dem andern angefügt denkt und die Gesetzmäßigkeiten seiner Bewegung auf der Grundlage der klassischen Mechanik und Elektrodynamik untersucht. Die wirkliche Durchführung der Theorie erfordert einen umfassenden mathematischen Apparat, der sich wohl die Ergebnisse der weit ausgebildeten astronomischen Störungstheorie wird zunutze machen müssen. Ueber den Weg, auf dem er zu seinen Schlüssen gelangt ist, gibt Bohr nur an, daß das sogenannte Korrespondenzprinzip, das von ihm im Jahre 1917 aufgestellt wurde, die entscheidende Rolle gespielt hat. Die Frequenz der Schwingung, die beim Uebergang eines Elektrons zwischen zwei hochquantigen Bahnen ausgesandt wird, ist gleich der eines bestimmten Obertons derjenigen periodischen Bewegung, die das Elektron im stationären Zustand vollführt. Zugleich besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen der Intensität der Strahlungskomponente und der Amplitude der dem Oberton zugehörigen harmonischen Komponente der stationären Bewegung des Elektrons. Das Korrespondenzprinzip behauptet, daß man in dieser Weise die Intensität der Spektrallinien genau richtig für unendlich große Quantenzahlen, annähernd richtig für beliebige Quantenzahlen findet, und stellt derart eine überaus fruchtbare Beziehung zwischen den nach der klassischen Mechanik berechenbaren stationären Bewegungen der Elektronen und der quantentheoretisch geregelten Strahlungsfrequenz und -intensität dar. G. Laski. 47

NACHRICHTEN

H. Müller-Breslau. Am 13. Mai dieses Jahres vollendet H. B. Müller-Breslau, Professor der Statik der Baukonstruktionen und des Brückenbaus an der Technischen Hochschule in Berlin, sein siebzigstes Lebensjahr. Wir empfinden es als freudige Pflicht, bei diesem Anlaß seiner Bedeutung und seiner Verdienste zu gedenken. In der Reihe der Namen jener Männer, die für die Entwicklung der Ingenieurstatik maßgebend waren, hat der Name von Müller-Breslau in der ganzen Welt einen besonders guten Klang und bedeutet einen gewissen Abschluß zu einer hohen Vollkommenheit.

Die Statik der Baukonstruktionen ist eine Wissenschaft von eben der besonderen Art der angewandten Mathematik und Mechanik, die in dieser Zeitschrift behandelt wird, bei der die mathematische Leistung sich erst an die Aufspürung der wesentlichen Züge des Festigkeitsaufbaus, der Belastungen und Widerstandskräfte der Ingenieurkonstruktionen und an die Schöpfung der mannigfachen Gliederungsmöglichkeiten der Bauwerke anschließen kann. In gewisser Weise hat das Arbeitsverfahren der Statik Ähnlichkeit mit dem der mathematischen Physik, fügt jedoch in der Auffindung der neuen Bauarten nach den Gesichtspunkten der Sicherheit und Verantwortung, der Wirtschaftlichkeit, der Ästhetik und der steigenden technischen Kultur ein neues schöpferisches und künstlerisches Element hinzu.

Müller-Breslau's bisheriges Lebenswerk zeigt die Vereinigung dieser verschiedenen For-

schungsrichtungen in der glücklichsten Weise. Seine Arbeiten während der verflossenen fünf Jahrzehnte haben nicht nur der Theorie der Fachwerke, der Stabwerke, des Massivbaus, der Gründungen und des Erddrucks neue Wege gewiesen, sondern auch den Bauwerken der eisernen Brücken, der Eisenhochbauten und des Eisenbetonbaus in Deutschland und in der ganzen Welt ihren sichtbaren Stempel aufgedrückt, indem sie der Entwurfsarbeit des Ingenieurs eine wunderbare Beweglichkeit des Schaffens wie der wirtschaftlichen und ästhetischen Ausnutzung der Baustoffeigenschaften gebracht haben.

Die Statik und Kinematik der statisch-bestimmten und statisch-unbestimmten Fachwerke, die Theorie der Biegungs- und Einflußlinien, die schwierigen räumlichen Fachwerke der Kuppeln und der Windverbände der Brücken, das Zusammenarbeiten der steifen Fahrbahntafeln mit den eigentlichen Brückenträgern, die Abschätzung der Nebenspannungen und der Knicksteifigkeit der offenen und geschlossenen Brückenquerrahmen und Gitterstützen, der Bau der Behälter und der Führungsgerüste, der Erddruck, endlich die Flugzeug- und Luftschiffstatik und der Bau der drehbaren Luftschiffhallen und der Kriegsbrücken verdanken seinen Anregungen und Vorschriften, seinen Gleichungsansätzen und seiner Ausbildung der Rechenverfahren, die beide erst überhaupt die Durchführung ermöglichten, einen hohen Grad der Zuverlässigkeit, Übersichtlichkeit und Erkenntnis des Kräftespiels.

Es würde zu weit führen, hier seine sehr zahlreichen Einzelveröffentlichungen aus allen diesen Gebieten aufzuführen und einen genaueren Lebensabriß zu geben; beides findet man in der bekannten Festschrift[1]), die seine Schüler und Freunde ihm zum 60. Geburtstag gewidmet haben bis zu jenem Zeitpunkt. Hier möchten wir nur hinweisen auf die klassischen Lehr- und Handbücher der „Statik der Baukonstruktionen" und der „Neueren Methoden der Festigkeitslehre", die er von Auflage zu Auflage nach den neuen Erfahrungen und Anregungen aus Theorie und Praxis verfeinert und übersichtlicher gestaltet. Bemerkenswert ist dabei, daß diese Entwicklung mit der fortschreitenden Schwierigkeit der Aufgaben ihn zu einer gewissen Abwendung von den graphischen Methoden und zu einer Bevorzugung der rechnerischen Überlagerung von Einflußlinien, zur ausgedehnten Anwendung von Differenzengleichungen und zur Ausbildung von neuen, für die Rechenmaschine geeigneten Auflösungsverfahren der Gleichungen geführt hat.

Die große Wirksamkeit, die Müller-Breslau von Anfang bis heute an der Technischen Hochschule ausübt und die eigentlich niemals auf Widerstand stößt, weil sich ihr Kollegen und Schüler gerne fügen, beruht auf seinem zielbewußten, mit Wohlwollen gepaarten Willen, auf der Abwesenheit jeder Pedanterie und auf seiner vorzüglichen Rednergabe, die sich jedoch stets nur für sorgfältig erwogene Zwecke einsetzt.

Solche Männer wie Müller-Breslau, die dem forschenden, dem lehrenden und dem bauenden Ingenieur ein Wegweiser und Vorbild sind, brauchen wir jetzt noch dringender als früher. Wir wünschen uns sowohl wie ihm selbst, daß er seine noch immer fortschreitende und allen Fortschritten zugängliche Kraft noch recht lange in den Dienst der Allgemeinheit stellen möge. Reissner. 37

[1]) H. Müller-Breslau-Festschrift, Leipzig 1912.

Angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin. Zur Ergänzung meines Aufsatzes im ersten Heft dieser Zeitschrift mögen kurz die Vorlesungen und Übungen genannt werden, die schon in dem kommenden Sommer-Semester an der Berliner Technischen Hochschule über angewandte Mathematik gehalten werden: Fortsetzung der Jahreskurse über Darstellende Geometrie und Mechanik, ferner Übungen in praktischer Mathematik, Seminar für Mechanik, Vektoranalysis, Vermessungskunde mit Übungen, Grundlagen der Elektrotechnik, Übungen im Elektrotechnischen Laboratorium, theoretische Elektrotechnik, Übungen im Maschinenlaboratorium, Geschichte der Technik, Mechanik der Flugzeuge u. a. Hamel. 39

Berliner Ausschuß für technische Mechanik. In der Zeit von Januar bis April 1921 wurden im Ausschuß für technische Mechanik des Berliner Bezirksvereines deutscher Ingenieure folgende Vorträge gehalten: Prof. Bennewitz, Elastische Nachwirkung; Prof. Reissner, Berechnung von Windrädern; Prof. Gümbel, Elementare Theorie der gekoppelten Schwingungen. In der 19. ordentlichen Versammlung am 10. Januar wurden gewählt: Zum Obmann Prof. Reissner, zum ersten Stellvertreter Prof. Rüdenberg, zum zweiten Stellvertreter Zivil-Ing. Duffing, zum Schriftführer Dr. Everling, zu seinen Stellvertretern Dr. Flügel und Herr Melchior. Ferner wurden 23 Herren als Mitglieder des Ausschusses neu hinzugewählt. Am 25. April spricht Prof. M. Weber-Charlottenburg „über die Analogie zwischen den fünf Problemen der Mechanik: Ebenes Pendel, elastische Linie, Wasserdruck-Kettenlinie, zylindrische Luftschiffhülle und Hohlreifen unter Innendruck". Am 9. Mai wird Prof. v. Karman-Aachen als Gast einen Vortrag über „Oberflächenreibung von Flüssigkeiten" halten.

(Redaktionsschluß 30. April 1921.)

Druckfehler-Berichtigung. In Heft 1, S. 76, rechte Spalte, Zeile 24 v. o. (Kl. Mitt.: Steuertarif und Ausgleichsrechnung) soll es heißen »Zehner« statt »Zahlen«.

Druck von A. W. Schade, Berlin N. 39.